Maurice Chossat • Yannick Privat

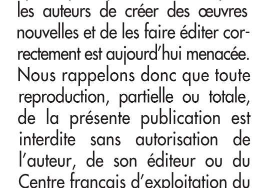
Aide-mémoire

Mathématiques de l'ingénieur

2e édition



Illustration de couverture : © Vladimir Popovic - Fotolia.com



ISBN 978-2-10-054822-4

TABLE DES MATIÈRES

1 • ARITHMÉTIQUE ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE

1.1 Symboles usuels de l'algèbre

Symboles	*Symboles dits quantificateurs*
$\forall$	signifie « quel que soit » ; par exemple $\forall a \in E$, quel que soit a appartenant à E.
$\exists$	signifie « il existe » ; par exemple $\exists a \in E$, il existe a appartenant à E, tel que … .
$a \in E$	a est un élément de l'ensemble E.
$a \notin E$	a n'appartient pas à E.
$\begin{cases} E \supset F \\ F \subset E \end{cases}$	Symbole de l'*inclusion* signifiant que F est un sous-ensemble de E, c'est-à-dire contenu dans E et pouvant être E lui-même.
$\varnothing$	Ensemble *vide*.
$E \cap F$	*Intersection* de E et de F ; ensemble des éléments communs à E et à F.
$E \cup F$	*Réunion* de E de F ; ensemble des éléments appartenant soit à E, soit à F, soit à leur intersection.
$\complement_A$	*Complémentaire* de A sous-ensemble de E ; on a $$A \cap \complement_A = \varnothing.$$
$a \top b = c$	Relation exprimant que c est le résultat de l'opération interne effectuée sur a et b éléments de E. On trouve aussi : $$a \perp b \ ; \quad a * b \ ; \quad a + b \ ; \quad a \,.\, b.$$
$a \top e = e \top a = a$	e est l'élément *neutre* de l'opération $\top$.
$a \top a' = e$	a et a' sont des éléments *symétriques* dans l'opération $\top$.
aRb	a et b satisfont à une *relation binaire* désignée par R.
$y \to f(x)$	x élément de E s'applique sur y, élément de F.
$y \Leftrightarrow f(x)$	L'application est *bijective*.
$f \circ g$	application composée signifiant $y \to f[g(x)]$; ne pas confondre avec $g \circ f$ signifiant $y \to g[f(x)]$.
a modulo n	signifie $a + Kn$, quel que soit K entier relatif.
$\lvert a \rvert$	valeur absolue ou module de a.

1.2 Structures algébriques

A) **Groupe** : ensemble G non vide possédant une loi de composition interne satisfaisant aux axiomes suivants :

1° $\forall a, b, c \in G : (a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ (associativité),
2° $\exists e \in G, \forall a : a \top e = e \top a = a$ (e, élément neutre),
3° $\forall a \in G, \exists a' : a' \top a = a \top a' = e$ (a', symétrique),

Groupe *abélien* : $\forall a, b \in G : a \top b = b \top a$ (commutativité).

Propriétés :

$\forall a, b, c \in G, a \top c = b \top c \Rightarrow a = b, c \top a = c \top b \Rightarrow a = b$ (tout élément est régulier) ;

$\forall a, b \in G, \exists x \in G$ tel que $a \top x = b : x = a' \top b$
et $x \top a = b : x = b \top a'$.

Sous-groupe : $G' \subset G$ est un sous-groupe de G si $\forall a, b \in G' : a \top b' \in G'$ (b' symétrique de b dans G).

B) **Anneau** : ensemble A muni de deux lois de composition interne satisfaisant aux axiomes suivants :

I. A est un groupe abélien pour la première loi (addition) :

1° $\forall a, b, c \in A : (a + b) + c = a + (b + c)$;
2° $\exists 0 \in A, \forall a : a + 0 = 0 + a = a$;
3° $\forall a \in A, \exists(-a) : a + (-a) = (-a) + a = 0$;
4° $\forall a, b \in A : a + b = b + a$.

II. $\forall a, b, c \in A : (ab)\,c = a(bc)$ (associativité de la multiplication).

III. $\forall a, b, c \in A : a(b + c) = ab + ac, (a + b)\,c = ac + bc$ (distributivité).

Anneau unitaire : $\exists e \in A, \forall a : ea = ae = e$
(e, élément neutre pour la deuxième loi, appelé unité).
Anneau d'intégrité : $\forall a \# 0, \forall b \# 0 \Rightarrow ab \# 0$ (pas de diviseurs de zéro).
Propriétés : $\forall a, b : (-a)\,b = a(-b) = (-ab), \forall a : \mathrm{a}.0 = 0.a = 0$.

C) **Corps** : ensemble K muni de deux lois de composition interne satisfaisant aux axiomes suivants :

I. K est un groupe *abélien* pour la première loi (addition).

1° $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$,
2° $\exists 0 \in K, \forall a : a + 0 = 0 + a = a$,
3° $\forall a \in K, \exists(-a) : a + (-a) = (-a) + a = 0$,
4° $\forall a, b \in K : a + b = b + a$.

II. K (privé de 0) est un groupe pour la deuxième loi (multiplication).

1° $\forall a, b, c \in K : (ab)\, c = a(bc)$,
2° $\exists e \in K, \forall a : ea = ae = a$,
3° $\forall a \# 0, \exists a^{-1} : aa^{-1} = a^{-1}\, a = e$,

III. $\forall a, b, c \in K : a(b + c) = ab + ac, (a + b)\, c = ac + bc$.
Corps commutatif (ou droit) : la deuxième loi est commutative.

1.3 Calculs dans l'ensemble des nombres réels

1.3.1 Exposants et radicaux

Exposants : p, q entiers positifs, négatifs ou nuls, a et b réels différents de 0

$$a^{\circ} = 1, \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \qquad a^p\, a^q = a^{p+q},$$

$$(a^p)^q = a^{pq}, \qquad (ab)^p = a^p b^p, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Radicaux : n, q entier positifs, p entier relatif, a et b réels

$$\sqrt[q]{a} = b \rightleftharpoons a = b^q, \qquad \sqrt[nq]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[q]{a}}$$

$$\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = a^m.$$

m, m' rationnels, a et b réels positifs

$$a^m\, a^{m'} = a^{m+m'}, \quad (a^m)^{m'} = a^{mm'}, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

$$(ab)^m = a^m\, b^m, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

1.3.2 Identités usuelles

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = \sum_{1 \le i \le n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3 = \sum_{1 \le i \le n} a_i^3 + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i^2 a_j + 6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \frac{p!}{k_1! \ldots k_n!} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n},$$

sommation étendue à tout ensemble d'entiers k_1, ..., k_n positifs ou nuls tels que $k_1 + \ldots + k_n = p$.

Division par $(x \pm a)$

$$x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + ax^{x-2} + \cdots + a^p x^{n-p-1} + \cdots + a^{n-1}).$$

Identité de Lagrange :

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 =$$
$$= (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 .$$

Théorème de Bezout. — Si 2 polynômes A et B sont premiers entre eux, il existe un polynôme u de degré < à celui de B et un polynôme v de degré < A tels que l'on ait $Au + Bv = 1$.

1.3.3 Sommations usuelles

Progressions arithmétiques : a premier terme,
r raison,
n nombre de termes.

Somme des n premiers termes $S = a + (a + r) + \ldots + (a + (n - 1)r)$.

$$S = \frac{[2a + (n-1)r]n}{2}.$$

Progressions géométriques : q = raison, a = 1er terme,

Somme des n premiers termes $S = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$.

$$S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Limite de S quand $q < 1$ et $n \to \infty$:

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Produit des n premiers termes :

$$P = \sqrt{(al)^n} = (al)^{\frac{n}{2}}.$$

Sommations sur nombres entiers

Somme des n premiers nombres entiers :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme des carrés des n premiers nombres entiers :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Somme des cubes des n premiers nombres entiers :

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (S_1)^2.$$

Somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers :

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Somme des nombres impairs :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

Somme des nombres pairs :

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2\,S_1 = n(n+1).$$

Somme des carrés des nombres impairs :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Somme des carrés des nombres pairs :

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Somme des cubes des nombres impairs :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Somme des cubes des nombres pairs :

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2\,n)^3 = 2\,n^2(n+1)^2\,.$$

Sommes tirées de la relation :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ (progression géométrique).}$$

Dérivons :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}\,, \quad x \neq 1.$$

Faisons $x = \frac{1}{2}$:

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right),$$

$$\text{ou } \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^n}\,.$$

En dérivant encore une fois, on a :

$$2 + 2.3\,x + 3.4\,x^2 + \cdots + n(n-1)\,x^{n-2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{n(n-1)x^{n+1} - 2x^n(x^2-1) + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}\,.$$

En faisant $x = \frac{1}{2}$ et en multipliant par $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2^2}$, on a les sommes :

$$\frac{2}{2} + \frac{2.3}{2^2} + \frac{3.4}{2^3} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2^{n-1}} = 2^3 - \frac{n^2 + 3n + 4}{2^{n-1}}\,,$$

$$\frac{2}{2^2} + \frac{2.3}{2^3} + \frac{3.4}{2^4} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2^n} = 2^2 - \frac{n^2 + 3n - 4}{2^n}\,.$$

Sommations de la forme $S = \sum n(n-1)$.

$$S_{12} = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}\,,$$

$$S_{123} = 1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + (n-2)(n-1)\,n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}\,,$$

....

$$S_{12\ldots k} = \frac{(n+1)n(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)}{k+1}\,.$$

Sommations de la forme $S = \sum \frac{1}{n(n-1)}$

$$S_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = \sum\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

$$S_2 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right),$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}\frac{n^2-n-2}{2n^2-2n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n-1)}.$$

1.4 Numération binaire

En numération binaire il n'y a que 2 signes (que l'on désigne généralement par 0 et 1). Tout nombre, en numération binaire, s'exprime par une suite de termes formés de 0 et de 1 qui, multipliés par les puissances de 2 successives, donnent la représentation décimale du nombre.

Exemple : $23 = 16 + 4 + 2 + 1 =$
$= 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 1\ 0\ 1\ 1\ 1.$

Pour transformer en binaire un nombre exprimé en décimal, il faut commencer par diviser ce nombre par la plus haute puissance de 2 y contenue, diviser le reste par la plus haute puissance de 2 contenue dans ce reste, etc.

Puissances de 2.

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1\ 024$
$2^{11} = 2\ 048$
$2^{12} = 4\ 096$
$2^{13} = 8\ 192$
Etc.

Exemple : Transformer 365 en numération binaire.

La plus haute puissance de 2 contenue :
dans 365 est $256 = 2^8$, reste 109 ;
dans 109 est $64 = 2^6$, reste 45 ;
dans 45 est $32 = 2^5$, reste 13 ;
dans 13 est $8 = 2^3$, reste 5 ;
dans 5 est $4 = 2^2$, reste 1 ;
dans 1 est $1 = 2^0$, reste 0 ;

$365 = 2^8 \times 1 + 2^7 \times 0 + 2^6 \times 1 + 2^5 \times 1 + 2^4 \times 0 +$
$+ 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 1$

$= 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1.$

Inversement pour transformer un nombre du binaire en décimal, il faut additionner les puissances de 2 matérialisées par le rang du symbole 1.

Exemple : Transformer 1 0 1 0 1 0 0 = $2^2 + 2^4 + 2^6 = 4 + 16 + 64 = 84$.

Le nombre de signes N utilisé en numération binaire est pour exprimer un même nombre de n chiffres en décimal,

$$N = \frac{n}{\log_{10} 2} = \frac{n}{0{,}301\,03}.$$

Ainsi, un nombre de 9 chiffres en décimal exigera 30 signes en binaire.

Opérations en numération binaire

Table d'addition :

	0	1
0	0	1
1	1	0

avec report de 1 à la colonne suivante pour l'addition 1 + 1 = 10.

ADDITION DE 2 NOMBRES. — Se fait comme en décimal, en additionnant les chiffres de même rang en commençant par la droite. Quand on a 2 fois 1 le résultat est 0 et on reporte 1 à la colonne suivante.

Exemple : Additionner 27 = 1 1 0 1 1 et 13 = 1 1 0 1.

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,0\,0 \end{array} = 32 + 8 = 40.$$

Addition de plusieurs nombres. — Il faut procéder par récurrence, additionner les 2 premiers, ajouter le troisième à la somme obtenue, etc.

SOUSTRACTION. — Méthode par complémentation.

Dans le chiffre à soustraire on remplace les 1 par 0 et vice versa ; on additionne avec le premier nombre ; on supprime le premier 1 sur la gauche et on ajoute 1 au résultat obtenu.

Exemple : 83 – 42 = 41.

83 = 1 0 1 0 0 1 1

42 = 1 0 1 0 1 0 ;   complément   0 1 0 1 0 1.

Opération

```
1 0 1 0 0 1 1
  0 1 0 1 0 1
-------------
1 1 0 1 0 0 0
            1
-------------
  1 0 1 0 0 1  = 32 + 8 + 1 = 41.
```

Multiplication. — Table de multiplication.

Multiplicande

	0	1
0	0	0
1	0	1

Multiplicateur → (lignes)

autrement dit : $1 \times 1 = 1$. Tous les autres cas donnent 0. La multiplication s'opère comme en décimal. Tous les produits partiels sont 0 ou le multiplicande. Additionner les produits partiels successivement.

Exemple : $19 \times 13 = 247$.

```
                        1 0 0 1 1
                          1 1 0 1
                        ---------
                        1 0 0 1 1
                      0 0 0 0 0
                    1 0 0 1 1
                    -------------
3 premières lignes  1 0 1 1 1 1 1
quatrième ligne   1 0 0 1 1
                  ---------------
                  1 1 1 1 0 1 1 1  = 247.
```

Remarque. — Le nombre de chiffres du produit est au plus la somme des nombres des chiffres du multiplicande et du multiplicateur (ici 5 + 4 = 9). Règle générale quelle que soit la base de numération.

DIVISION. — La division directe en binaire s'opère par soustractions successives, opération assez compliquée. Les machines qui utilisent la numération binaire, opèrent par formules itératives utilisant l'addition, la soustraction et la multiplication et donnant l'inverse du diviseur. Il suffit ensuite de multiplier.

Binaire décimal

Chaque chiffre décimal de 0 à 9 est représenté par sa valeur en binaire normal et un nombre est formé de la juxtaposition de ces représentations. Par exemple 72 se traduit par 7 = 0 1 1 1 et 2 = 0 0 1 0, soit 0 1 1 1 0 0 1 0. Cette représentation utilisée dans certaines machines électroniques n'a plus aucun rapport avec le binaire normal (elle représenterait 114).

1.5 Algèbre de la logique ou algèbre de boole

L'algèbre de Boole opère sur 2 éléments seulement que l'on représente habituellement par 0 et 1. Cette notation indique seulement 2 états ou 2 positions qui s'excluent mutuellement (par exemple l'état ouvert ou fermé d'un contact électrique, comme nous le verrons plus loin).
Une variable de l'algèbre de Boole est un symbole qui peut prendre arbitrairement l'une ou l'autre des 2 valeurs 0 et 1. En permutant ces valeurs, on obtient des relations correspondant par dualité avec les relations initiales.
L'algèbre de Boole comporte 3 opérations de base :

$y \backslash x$	0	1
0	0	1
1	1	1

1° *La somme logique* (symbole $\vee$) dont la table est celle ci-contre : ce qui veut dire que $x \vee y$ vaut 1 si l'une au moins des variables vaut 1 ou encore si l'une *ou* l'autre vaut 1. Si les 2 variables valent 0, $x \vee y = 0$.
Quel que soit x, $x \vee x = x$ (idempotence).

2° *Produit logique* (symbole.) dont la table est celle ci-contre : ce qui veut dire que $x.y$ vaut 1 si et seulement si les 2 variables valent 1 (ou encore si l'une *et* l'autre valent 1).
Si l'une des 2 variables vaut 0, $x.y = 0$.
Quel que soit x, $x.x = x$ (idempotence).
On désigne encore quelquefois ces 2 opérations par l'opération *ou* (somme) et l'opération *et* (produit).

$y \backslash x$	0	1
0	0	0
1	0	1

3° *Négation ou complémentation.* — Opération à 1 seule variable (symbole x' ou quelquefois $\bar{x}$, x barre) qui consiste en ce que le résultat vaut 1 si la variable initiale vaut 0 et inversement.
On vérifie que ces opérations possèdent les propriétés suivantes :

Commutativité : $x \vee y = y \vee x$, $x.y = y.x$.
Associativité : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $a.(b.c) = (a.b).c$.
Ce qui permet de supprimer les parenthèses.

Distributivité d'une opération par rapport à l'autre :

$$x.(y \vee z) = x.y \vee x.z\,,$$

$$x \vee (y.z) = (x \vee y).(x \vee z).$$

Propriétés de la négation :

$$x \vee x' = 1, \qquad x.x' = 0$$

$$(x \vee y)' = x'y', \qquad (x.y)' = x' \vee y'.$$

FONCTIONS DE VARIABLES BOOLÉENNES x, y, z, ... C'est une quantité binaire (c'est-à-dire qui ne prend que les valeurs 0 et 1) dont la valeur (0 ou 1) est connue quand on connaît les valeurs de x, y, z.

Développement normal disjonctif :

Quelle que soit la fonction, on a :

$$f(x, y, z, ...) = [f(1, y, z, ...).x \vee f(0, y, z, ...).x'.$$

L'expression du premier membre comprend des termes comportant un variable de moins. On peut donc développer n'importe quelle fonction de n variables en une expression comportant 2^n termes.

Développement normal conjonctif : dérivé du précédent par dualité. Identité de base :

$$f(x, y, z, ...) = [f(1, y, z) \vee x'].[f(0, y, z) \vee x]\;.$$

Comporte également 2^n termes.
Nombre de fonctions possibles de n variables = 2^{2^n}.

1.6 Analyse combinatoire

Permutations. Nombre de groupes différents que l'on peut faire avec m objets en tenant compte de l'ordre des objets.

1° *Sans répétitions* (c'est-à-dire qu'il y a m objets différents et que, par conséquent, chaque objet figure une seule fois dans chaque groupe) : $P_m = m\,!$

2° *Avec répétitions* : plusieurs objets semblables peuvent figurer dans chaque groupe ; nombre de permutations de m objets dont α, β, γ, ... semblables, tels que $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = m$

$$R_m^{\alpha, \beta, \gamma \ldots} = \frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_\beta \cdot P_\gamma \ldots} = \frac{m\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\,\ldots}$$

Exemple :

$$m = 4,\ \alpha = 2,\ \beta = 2\ ;\ R_4^{2,\,2} = \frac{4\,!}{2\,!\,2\,!} = 6\,.$$

a a b b   *b a b a*
a b a b   *b a a b*
a b b a   *b b a a.*

Arrangements de m objets p à p = nombre de groupes de p objets différents que l'on peut former avec m objets différents en tenant compte de l'ordre :

$$A_m^p = m(m-1)\ldots(m-p+1) = \frac{m\,!}{(m-p)\,!}$$

(Si $p = m$, on a $A_m^m = P_m = m\,!$).

Combinaisons de m objets p à p = nombre de groupes de p objets différents qu'on peut former avec m objets sans tenir compte de l'ordre.

1° *Sans répétition :* $C_m^p = \dfrac{A_m^p}{P_p} = \dfrac{m\,!}{p\,!\,(m-p)\,!}\,.$

2° *Avec répétitions :* $K_m^p = \dfrac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{p\,!} = C_{m+p-1}^p$, que l'on peut encore mettre sous la forme

$$K_m^p = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+m-1)}{(m-1)\,!}\,.$$

Répétition signifie ici que l'on peut faire entrer dans le même groupe plusieurs fois le même objet (ou la même lettre) sans cependant que le total des objets *différents* dépasse m.

Exemple $\quad C_4^3 = 4 : K_4^3 = \dfrac{4.5.6}{3\,!} = 20\,.$

1.6.1 Propriétés des combinaisons

Sans répétitions : $C_m^p = C_m^{m-p}$,

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1} \text{ (triangle de Pascal)},$$

$$C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-2}^{p-1} + \cdots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$$

Avec répétitions : $K_m^p = K_{m-1}^p + K_m^{p-1} = C_{m+p-1}^p$,

$$K_m^p = K_1^{p-1} + K_2^{p-1} + \cdots + K_{m-1}^{p-1} + K_m^{p-1}.$$

1.6.2 Formule du binôme et formules dérivées

$(x+a)(x+b)\ldots(x+l) = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \cdots + S_p x^{m-p} + \cdots + S_m$,

avec :

$$S_1 = a + b + c + \cdots + l,$$

$$S_2 = ab + ac + \cdots + bc + bd + \cdots + cd + \cdots$$

$$S_3 = abc + abd + acd + bcd + \cdots .$$

Si $a = b = c \cdots = l$, on a la formule du *binôme de Newton*

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \cdots + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m.$$

Le nombre des termes est $(m+1)$.

Si $x = a = 1 \Rightarrow 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

$$x = -a = 1 \Rightarrow 1 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}.$$

1.6.3 Triangle de pascal

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
1	C_{n-1}^{1} …	C_{n-1}^{p-1}		C_{n-1}^{p}	…	
1	C_{n}^{1} …			C_{n}^{p}	…	

1.7 Équations algébriques

1.7.1 Fonctions symétriques des racines

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

σ_p représente la somme des produits p à p des racines, S_p la somme des puissances p de celles-ci.

$$\sigma_1 = -\frac{a_1}{a_0}, = \sigma_2 = \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \sigma_p = (-1)^p \frac{a_p}{a_0}, \cdots, \sigma_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

$$\begin{cases} a_0 S_1 + a_1 = 0 \\ a_0 S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 S_p + a_1 S_{p-1} + \cdots + a_{p-1} S_1 + pa_p = 0 \quad (0 < p \leq n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 S_{n+1} + a_1 S_n + \cdots + a_n S_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 S_{n+k} + a_1 S_{n+k-1} + \cdots + a_n S_k = 0. \end{cases}$$

Pour le calcul des sommes S_p ($p < 0$), prendre l'équation aux inverses.

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0,$$

$$\sum_{i,j} x_i^{\alpha} x_j^{\beta} = S_{\alpha} S_{\beta} - S_{\alpha+\beta}, \qquad \alpha \neq \beta,$$

$$\sum_{i,j} x_i^{\alpha} x_j^{\beta} = \frac{1}{2}(S_{\alpha}^2 - S_{2\alpha}),$$

$$\sum_{i,j,k} x_i^{\alpha} x_j^{\beta} x_k^{\gamma} = \left(\sum x_i^{\alpha} x_j^{\beta}\right) S_{\gamma} - \sum x_i^{\alpha+\gamma} x_j^{\beta} - \sum x_i^{\alpha} x_j^{\beta+\gamma} \text{ } (\alpha, \beta, \gamma \text{ différents}).$$

1.7.2 Equations réciproques

Soit f une fonction telle que $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$ et :

$$f(x) \equiv a_0 x^{2p} + \cdots + a_q x^{2p-q} + \cdots + a_p x^p + \cdots + a_q x^q + \cdots + a_0$$
$$\equiv x^p\left[a_0\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right) + \cdots + a_q\left(x^{p-q} + \frac{1}{x^{p-q}}\right) + \cdots + a_p\right]$$

se transforme par $\quad y = x + \frac{1}{x}$,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = S_2 = y^2 - 2, \ldots, x^p + \frac{1}{x_p} = S_p = yS_{p-1} - S_{p-2}.$$

1.7.3 Equations du premier degré

Voir au chapitre *Déterminants et Matrices*, le paragraphe « Systèmes linéaires », p. 22.

1.7.4 Equations du deuxième degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1° $\Delta = b^2 - 4\,ac > 0$: 2 racines réelles

$$\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2° Si $\Delta = b^2 - 4\,ac = 0$, 1 racine double : $x = -\frac{b}{2a}$;

3° Si $\Delta = b^2 - 4\,ac < 0$, 2 racines imaginaires :

$$\left.\begin{array}{l} x' \\ x'' \end{array}\right\} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

■ Relations entre coefficients et racines

$$y = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a(x - x')(x - x'').$$

Somme des racines : $S = x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$.

Produit des racines : $P = x'x'' = \dfrac{c}{a}$.

DÉTERMINATION DE 2 NOMBRES x ET y, dont on connaît la somme S et le produit P, ou la différence D et le produit P.

Avec $x + y = S$, x et y sont racines de :

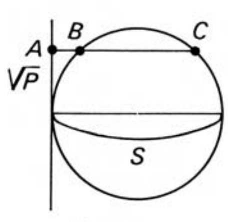
$$X^2 - SX + P = 0.$$

Avec $x - y = D$, x et $(-y)$ sont racines de :

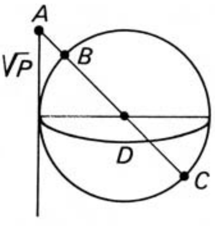
$$X^2 - DX - P = 0.$$

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE :

Connaissant S et P.



Connaissant D et P.



On en déduit 2 théorèmes :

a) Le produit de 2 nombres réels variables, dont la somme est constante, est maximal lorsque ces 2 nombres sont égaux.
b) La somme de 2 nombres positifs, dont le produit est constant, est minimale lorsque ces 2 nombres sont égaux.

■ Étude du trinôme du deuxième degré

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Signe du trinôme :

$b^2 - 4\,ac < 0,$ y toujours du signe de a ;

$b^2 - 4\,ac = 0,$ y du signe de a, sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ pour lequel $y = 0$;

$b^2 - 4\,ac > 0,$ y du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

1.7.5 Equations du troisième degré

(1) $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE. — En posant $x = y - \dfrac{a}{3}$, on obtient :

(2) $y^3 + py + q = 0,$ avec $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ et $q = \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c.$

Formons $R = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^2$ ou $4\,p^3 + 27\,q^2$.

Les racines de (2) sont :

$$x_1 = u + v, \qquad x_2 = u\alpha_1 + v\alpha_2, \qquad x_3 = u\alpha_2 + v\alpha_1,$$

u et v étant les expressions

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

α_1 et α_2 étant les racines cubiques de l'unité :

$$\alpha_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{-1 + -i\sqrt{3}}{2}.$$

Si $R > 0$, une seule racine réelle :

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{(formule de Cardan)}$$

Si $R = 0$, 1 racine double $= -\dfrac{3q}{2p}$ et une simple $= \dfrac{3q}{p}$.

Si $R < 0$, 3 racines réelles qui, quoique réelles, se présentent sous forme imaginaire (somme de 2 imaginaires conjugués) (voir résolution trigonométrique).

Résolution trigonométrique. — Par la transformation $x = y - \dfrac{a}{3}$, on amène l'équation à la forme $y^3 + 3\,py + 2\,q = 0$.

1er cas : $p > 0$. Posons $\text{sh}\,\varphi = \dfrac{q}{p\sqrt{p}}$.

Les 3 racines sont alors :

$$\begin{cases} y_1 = -2\sqrt{p}\ \text{sh}\,\dfrac{\varphi}{3}, \\ y_2 = \sqrt{p}\ \text{sh}\,\dfrac{\varphi}{3} + \text{i}\sqrt{3p}\ \text{ch}\,\dfrac{\varphi}{3}, \\ y_3 = \sqrt{p}\ \text{sh}\,\dfrac{\varphi}{3} - \text{i}\sqrt{3p}\ \text{ch}\,\dfrac{\varphi}{3}. \end{cases}$$

2e cas : $p < 0$.

α) $p^3 + q^2 > 0$. On pose

$$\text{ch}\,\varphi = \frac{q}{-p\sqrt{-p}}\cdot$$

On a

$$\begin{cases} y_1 = -2\sqrt{-p}\ \text{ch}\,\dfrac{\varphi}{3}, \\ y_2 = \sqrt{-p}\ \text{ch}\,\dfrac{\varphi}{3} + \text{i}\sqrt{-3p}\ \text{sh}\,\dfrac{\varphi}{3}, \\ y_3 = \sqrt{-p}\ \text{ch}\,\dfrac{\varphi}{3} - \text{i}\sqrt{-3p}\ \text{sh}\,\dfrac{\varphi}{3}. \end{cases}$$

β) $p^3 + q^2 < 0$. On pose

$$\cos\varphi = \frac{q}{-p\sqrt{-p}}\,.$$

On a

$$\begin{cases} y_1 = -2\sqrt{-p}\cos\dfrac{\varphi}{3}, \\[2ex] y_2 = 2\sqrt{-p}\cos\left(\dfrac{\pi-\varphi}{3}\right), \\[2ex] y_3 = 2\sqrt{-p}\cos\left(\dfrac{\pi+\varphi}{3}\right). \end{cases}$$

1.7.6 Equation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

On calcule les solutions de l'équation du troisième degré $y^3 + ry^2 + sy + t = 0$,
dont les coefficients sont $r = -b$, $s = ac - 4d$, $t = d(4b - a^2) - c^2$.
Soit y la plus grande racine réelle de l'équation en y.
On calcule

$$p = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b + y}, \quad q = \frac{y}{2} + \varepsilon\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - d}\ ;$$
$$p_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b + y}, \quad q_1 = \frac{y}{2} - \varepsilon\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - d}\ ;$$

avec

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad \frac{ay}{2} - c > 0\ ;$$
$$\varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad \frac{ay}{2} - c < 0.$$

Les racines de l'équation du quatrième degré sont racines des 2 trinômes

$$\begin{cases} x^2 + px + q = 0, \\ x^2 + p_1x + q_1 = 0. \end{cases}$$

1.8 Déterminants systèmes linéaires et matrices

1.8.1 Déterminants

■ Calcul du déterminant d'une matrice carrée

DÉFINITION. — Une matrice est un tableau de nombres. Une matrice à n lignes et p colonnes est appelée matrice $n \times p$ ou matrice de taille $n \times p$.
Si $n = p$, on parle de matrice carrée.
Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre réel. On le note à l'aide de barres verticales ou en écrivant le mot « det » devant la matrice. On présente ci-dessous la règle de calcul d'un déterminant dans trois cas particuliers puis dans le cas général.

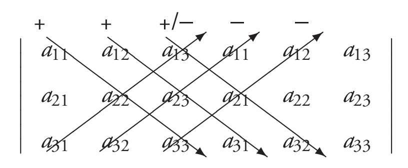
Déterminant 1×1. **—** Si a est un nombre réel, $\det(a) = a$.

Déterminant 2×2. **—** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Déterminant 3×3. **—**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} & a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ - & a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

Pour retrouver simplement cette formule, on peut utiliser une disposition pratique appelée *règle de Sarrus.*



Déterminant $n \times n$ $(n \geq 4)$. **—** A désignant une matrice carrée de taille $n \times n$, on note a_{ij} le coefficient de la matrice à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On appelle *mineur d'ordre* (i, j) et on note Δ_{ij} le déterminant de la matrice A privée de la ligne i et de la colonne j. On obtient ainsi une

matrice carrée d'ordre $(n-1) \times (n-1)$. On présente deux façons de calculer le déterminant :

– *développement selon la ligne i_0 :* $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \Delta_{i_0 j}$;

– *développement selon la colonne j_0 :* $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \Delta_{ij_0}$.

Grâce à cette technique, on est conduit, pour calculer le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$, à calculer des déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$. En réitérant ce procédé, on peut toujours se ramener au calcul du déterminant de matrices de taille 2×2.

■ Propriétés des déterminants

1° Nombre de termes = $n\,!$
2° Un déterminant ne change pas de valeur quand on permute lignes et colonnes (autrement dit quand on le fait tourner autour de sa diagonale principale).
3° Quand on échange 2 lignes (ou 2 colonnes) il change de signe.
4° Quand il a 2 lignes (ou 2 colonnes) identiques ou proportionnelles, sa valeur est 0.
5° Quand on multiplie tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par un même nombre, le déterminant (sa valeur) est multiplié par ce nombre.
6° Quand on ajoute aux éléments d'une ligne (ou d'une colonne) les éléments d'autres lignes (ou colonnes) multipliés par un nombre quelconque (le même nombre pour une ligne ou une colonne) le déterminant ne change pas.
7° On ne change pas la valeur d'un déterminant d'ordre n, en lui adjoignant au-dessus une ligne composée de 1 et de n zéros et en avant, une colonne de termes quelconques de façon à former ainsi un déterminant d'ordre $(n+1)$.

■ Produit de deux déterminants d'ordre *n*

Si A et B sont deux matrices de taille $n \times n$, $\det(AB) = \det A \det B$.

Application. Identité de Lagrange.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & aa'+bb' \\ aa'+bb' & a'^2+b'^2 \end{vmatrix}$$

D'où $(ab'-ba')^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2) - (aa'+bb')^2$.

■ Déterminants particuliers

Déterminant diagonal. — Tous les termes d'un même côté de la diagonale principale sont des 0 (sans que cette diagonale principale comporte elle-même un terme nul, sans quoi le déterminant serait nul)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Déterminant de Van der Monde. — Déterminant de la forme :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(c-d)(b-d)\,.$$

Déterminant antisymétrique. — Diagonale principale composée de zéros. Les termes symétriques par rapport à cette diagonale principale égaux et de signes contraires :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{vmatrix} \text{ est nul si d'ordre impair.}$$

Dérivée d'un déterminant dont les éléments sont fonctions de x.

La dérivée est la somme des déterminants obtenus en dérivant successivement chaque ligne (ou colonne) sans changer les autres lignes.

1.8.2 Systèmes linéaires et systèmes d'équations linéaires

Soit le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

1° α) $m = n$ et D, déterminant de la matrice A dont le coefficient à la ligne i et la colonne j est a_{ij}.

1 solution, donnée par la *règle de Cramer* :
x_i a pour valeur une fraction dont le dénominateur est D et le numérateur, D dans lequel on a remplacé la colonne i par la colonne des b.
Si $b_1 = b_2 = 0$, on a un *système homogène,* dont la seule solution, si $D \neq 0$, est $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0$.

β) $m = n$ et $D = 0$. Les inconnues s'expriment en fonction de l'une d'elles. Infinité de solutions dépendant d'un paramètre.

2° $m < n$. II y a au moins un déterminant d'ordre m tiré des équations, = 0. On peut donner à $(n - m)$ inconnues des valeurs arbitraires et les m inconnues s'expriment en fonction de ces $(n - m)$ valeurs. Il y a une infinité de solutions.

3° $m > n$. Il y a au moins un déterminant d'ordre n tiré des équations, ≠ 0. Pour vérifier que les autres équations sont compatibles, on borde le déterminant ≠ 0, à droite par les termes b ; en bas, par les coefficients de l'équation $(n + 1)$: il faut que ce déterminant soit nul.

Autre forme de la condition de compatibilité : il faut que la somme des produits respectifs des b par les solutions non nulles de l'équation homogène transposée, = 0 (c'est-à-dire que le produit scalaire des 2 vecteurs soit nul).

1.8.3 Matrices

Une matrice est un tableau de chiffres ou de données dont la manipulation obéit à certaines règles.
L'exemple le plus courant de matrice est le tableau de coefficients d'un système linéaire de m équations linéaires à n inconnues.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_n = b_m \end{cases}$$

avec $m \neq n$ ou $m = n$.

Si $m = n$, on a une *matrice carrée.*

Si on écrit les coefficients sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ et les vecteurs } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

on a $AX = B$, équation matricielle.

■ Règles d'opération sur les matrices

1° *Addition* : $c = a + b$. Matrices ayant même nombre de lignes et de colonnes. Le terme général de c est $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (autrement dit, addition terme à terme).

2° *Multiplication* par un scalaire. On multiplie *tous* les termes de la matrice par ce scalaire.

3° *Multiplication de 2 matrices* : A (m lignes, n colonnes) B (n lignes, m colonnes).

Terme général de $C = A.B$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \times b_{kj}$.

Remarque très importante. — Ne pas intervertir l'ordre des matrices : $AB \neq BA$.

4° $\det C = \det A \times \det B$ si matrices carrées ;

d'où : $\det A^n = (\det A)^n$.

■ Définitions et propriétés

α) *Matrice identité.* Composée de 0, sauf la diagonale principale, composée de 1 :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Propriété : $AI = IA = A$.

β) *Transposée A' de A.* C'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et inversement.

γ) *Matrice inverse d'une matrice carrée.* C'est une matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I$.

δ) *Calcul de l'inverse.* C'est la matrice transposée de A dans laquelle les termes ont été remplacés par les termes correspondants du déterminant adjoint.

ε) *Matrice singulière* : Matrice carrée dont le déterminant = 0.

Matrice régulière : — — — — ≠ 0.

ζ) *Matrice nulle.* Matrice dont tous les termes sont nuls.
La multiplication (pré ou post) d'une matrice régulière par la matrice 0, donne toujours la matrice 0. L'inverse n'est pas vrai : le produit de 2 matrices non nulles, peut être nul si les matrices sont singulières.

PRODUIT DE MATRICES CARRÉES :

1° Transposée d'un produit = produit interverti des transposées.

$$C = BA, \quad C' = A'B'.$$

2° Inverse d'un produit = produit interverti des inverses :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

S'étend à un nombre quelconque de matrices :

$$(ABC\ldots)^{-1} = \ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

3° Le produit d'une matrice par son inverse est commutatif : $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$.
4° La transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée : $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.
5° Matrices diagonales. Tous les termes sont nuls sauf ceux de la diagonale principale.

Produit $$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & 0 & 0 \\ 0 & b\beta & 0 \\ 0 & 0 & c\gamma \end{bmatrix}$$

Inverse $$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$$

Puissances $$A^n = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

MATRICES A ÉLÉMENTS COMPLEXES :

α) *Matrice conjuguée.* — Matrice $\bar{a}$ dont les éléments sont conjugués des correspondants de a

$$\bar{\bar{a}} = a \qquad \overline{ba} = \bar{b}.\bar{a}$$

$$Si \quad a = \bar{a}, \quad a \text{ est réel.}$$

La conjuguée de l'inverse est l'inverse de la conjuguée : $(\overline{a^{-1}}) = (\bar{a})^{-1}$.

β) *Matrice adjointe ou transconjugée.* — C'est la conjuguée de la transposée de a.

$$a^* = \bar{a}'.$$

■ Valeurs propres

Ce sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ce sont donc les nombres complexes λ solutions de l'équation polynômiale $\det(\lambda I - A) = 0$, où I désigne la matrice identité de taille $n \times n$.
Si une matrice de taille $n \times n$ est à coefficients dans l'ensemble des nombres complexes, alors elle admet exactement n valeurs propres complexes.

VECTEURS PROPRES :

Directions telles que tout vecteur est transformé par la matrice en un vecteur de même direction. Vecteurs solutions du système $AX = \lambda X$.
On écrit :

$$d_i = \begin{bmatrix} d_i^1 \\ d_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_i^n \end{bmatrix} = \text{vecteur correspondant à } \lambda_i.$$

LOCALISATION DES VALEURS PROPRES. Disques de *Gerschgorin.*

On doit avoir :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq P_i \quad \text{et} \quad |\lambda - a_{ii}| \leq Q_j,$$

avec $P_i = \sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}|$, somme des termes de la ligne i, avec $i \neq j$; (I)

$Q_j = \sum_{i=1}^{i=n} |a_{ji}|$, somme des termes de la colonne j, avec $i \neq j$. (II)

Les inégalités (I) déterminent dans le plan complexe des disques dont la réunion délimite un domaine D. Les inégalités (II) délimitent de même un domaine D' et l'intersection de D et D' forme l'ensemble des points du plan complexe qui comprend les valeurs propres de la matrice.

PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE.

L'équation caractéristique d'une matrice carrée A est $P(\lambda) = 0$, où P désigne le polynôme défini par $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Cette équation se réécrit, lorsque l'on développe le déterminant :

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0.$$

Les racines de P sont les valeurs propres de A. P s'appelle le polynôme caractéristique de A.

1° On a $P(0) = \alpha_n = \det(-A) = (-1)^n \det A$.
2° *Trace de la matrice* $A = \mathrm{Tr}(A) =$ somme des termes diagonaux de la matrice. On a :

$$\mathrm{Tr}(A) = -\alpha_1 = \text{somme des valeurs propres de } A.$$

3° *Produit des racines noté* Δ. $\Delta = \det A = (-1)^n \alpha_n$.
4° Les valeurs propres des puissances de A sont les puissances des valeurs propres de A. Ces puissances peuvent être choisies négatives si bien que les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.
5° *Théorème de Cayley-Hamilton.* P est un polynôme annulateur de A, autrement dit

$$P(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_n I = \text{la matrice nulle.}$$

DIAGONALISATION DE MATRICES CARRÉES.

Diagonaliser une matrice A, c'est trouver une matrice inversible P, appelée « matrice de passage » telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale. On note D cette matrice. Ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de A notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. P est la matrice $(X_1, \ldots, X_n)$, où X_i est le vecteur propre (colonne) associé à la valeur propre λ_i.
La diagonalisation d'une matrice carrée n'est pas toujours possible. Elle l'est par exemple si toutes les valeurs propres de A sont distinctes. Si pour une valeur propre, racine d'ordre p du polynôme caractéristique, on peut trouver p vecteurs propres *indépendants* lui correspondant, alors A est diagonalisable.
On donne brièvement une méthode permettant de diagonaliser une matrice A (si celle-ci est diagonalisable).
1° On calcule son polynôme caractéristique P et on détermine ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ainsi que leurs ordres de multiplicité respectifs $m_1, \ldots, m_p$. Ces racines sont bien sûr les valeurs propres de la matrice A.
2° Pour chaque valeur propre λ_i, d'ordre de multiplicité m_i, on détermine m_i vecteurs propres de A associés à λ_i linéairement indépendants $X_i^1, \ldots, X_i^{m_i}$. Cela passe bien évidemment par la résolution de l'équation $AX = \lambda_i X$.
On rappelle que k vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants si, et seulement si pour tous réels $\mu_1, \ldots, \mu_k$, on a :

$$\mu_1 . u_1 + \cdots + \mu_n . u_n = 0 \Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0.$$

3° On construit alors la matrice $P = (X_1^1, \ldots, X_1^{m_1}, \ldots, X_n^1, \ldots, X_n^{m_n})$ et on détermine son inverse P^{-1}.

4° *Conclusion.* On a alors : $D = P^{-1}AP$, où D est la matrice diagonale dont la diagonale est $[\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_n, \ldots, \lambda_n}_{m_n \text{fois}}]$.

TRIGONALISATION DE MATRICES CARRÉES.

Trigonaliser une matrice A, c'est trouver une matrice inversible P, appelée « matrice de passage » telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. On note T cette matrice. Ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de A notées λ_1, ..., λ_n. Il est à noter que si A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle est toujours trigonalisable (corollaire du théorème de d'Alembert stipulant que tout polynôme de degré n à coefficients complexes possède exactement n racines complexes).
Voici, comme précédemment, une méthode permettant de trigonaliser une matrice A.
1° On calcule son polynôme caractéristique P et on détermine ses racines λ_1, ..., λ_p ainsi que leurs ordres de multiplicité respectifs m_1, ..., m_p.
2° Pour chaque valeur propre λ_i, d'ordre de multiplicité m_i, on détermine m_i vecteurs caractéristiques de A associés à λ_i linéairement indépendants X_i^1, ..., $X_i^{m_i}$, c'est-à-dire m_i solutions indépendantes de l'équation $(A - \lambda_i I)^{m_i} = 0$, où I est la matrice identité de même taille que A.
3° On construit alors la matrice de passage $P = (X_1^1, \ldots, X_1^{m_1}, \ldots, X_n^1, \ldots, X_n^{m_n})$ et on détermine son inverse P^{-1}.
4° *Conclusion.* On a alors : $T = P^{-1}AP$, où T est triangulaire supérieure.

■ Polynômes, séries et fonctions de matrices carrées

Polynôme de matrice : $g(a) = a^n + m_1, a^{n-1} + \cdots + m_n a$ = matrice carrée.

1° La matrice $g(a)$ a pour valeurs propres $g(\lambda_i)$, les λ_i étant les valeurs propres de a.

2° Matrice ayant pour valeurs propres les racines d'un polynôme. Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ polynôme en x de degré n.

Matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 - a_1 \end{bmatrix}$ La matrice A a pour équation caratéristique le polynôme.

A est applée « matrice compagnon » du polynôme P.

SÉRIE DE MATRICES OU SÉRIES DE NEUMANN :

Série dont les termes sont des matrices carrées : la somme de la série est une natrice dont les termes sont les séries sommes des termes correspondants de chaque natrice terme. Si ces séries sont convergentes, la matrice somme est convergente.

$$\text{Série } S = I + \lambda a + \cdots + \lambda^n a^n + \ldots, \text{ avec } \lambda \neq \text{ des valeurs propres de } a.$$

S est convergente et égale à l'inverse de $(I - \lambda a)$ lorsque $|\lambda|$ est inférieur à l'inverse de la plus grande valeur propre de a.

■ Dérivation des matrices

Les termes d'une matrice peuvent être fonctions d'une variable t. La matrice dérivée sera par définition, la matrice formée des dérivées des termes.
Dérivée d'une somme de matrices = somme des matrices dérivées.

Dérivée d'un produit ab : $\dfrac{\mathrm{d}(ab)}{\mathrm{d}t} = a\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}b$.

(*Ne* pas *intervertir les produits.*)

Dérivée de a^2 : $\dfrac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}a + \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\left(\text{on ne peut écrire } 2a\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)$.

■ Matrices particulières

I. MATRICES SYMÉTRIQUES. — Matrices dont les termes symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.

Propriétés : $a = a'$.

La transposée de la matrice vecteurs propres en colonne est égale à son inverse :

$$P^{-1} = P'.$$

Diagonalisation : toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres et on a $D = P'AP$ et $A = PDP'$.
Puissances : Ce sont encore des matrices symétriques.

FORMES QUADRATIQUES. — Toute forme quadratique :

$$F = a_1\, x_1^2 + a_2\, x_2^2 + a_3\, x_3^2 + 2\, a_4\, x_1\, x_2 + 2\, a_5\, x_1\, x_3 + 2\, a_6\, x_2\, x_3,$$

peut se mettre sous la forme :

$$F = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Si l'on remplace A par $A = PDP'$ et si on pose

$$P' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

on a :

$$F = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]\, D \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

et F s'écrit sous la forme d'une somme de carrés de y_i (réduction de Gauss).

II. MATRICES ANTISYMÉTRIQUES. — Matrice dont les termes diagonaux sont nuls et les termes symétriques égaux et de signes contraires.

Une matrice antisymétrique d'ordre impair est singulière (déterminant = 0).
La transposée d'une matrice antisymétrique est antisymétrique.

$$\text{Puissances} \begin{cases} a^n \text{ symétrique si } n \text{ pair positif ;} \\ a^n \text{ antisymétrique si } n \text{ impair positif.} \end{cases}$$

III. MATRICES STOCHASTIQUES ou matrices de probabilités.

Tous les termes sont positifs ou nuls, ≤ 1 et la somme de chaque colonne ou ligne est égale à 1.

Propriétés.

1° Toutes les puissances des matrices stochastiques sont des matrices stochastiques.

2° La prémultiplication d'un vecteur stochastique par une matrice stochastique donne encore un vecteur stochastique.

3° L'équation caractéristique d'une matrice stochastique a au moins une racine = 1.

4° Les racines autres que 1 de l'équation caractéristique d'une matrice stochastique sont :

a) toujours < 1 si elles sont réelles ;

b) de module inférieur ou égal à 1 si elles sont complexes.

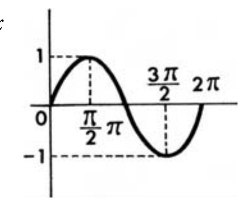
5° Quand le module des racines complexes de l'équation caractéristique est égal à 1, ce sont les racines de l'unité.

1.9 Fonctions usuelles simples

1.9.1 Fonctions circulaires

• $y = \sin x$. Période 2π, impaire, $\sin(x + \pi) = -\sin x$

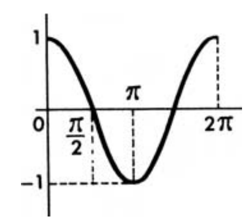
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	$1 \searrow$	0



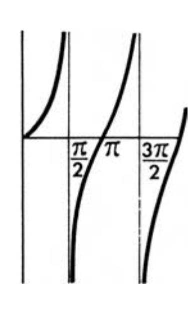
• $y = \cos x$. Période 2π, paire, $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

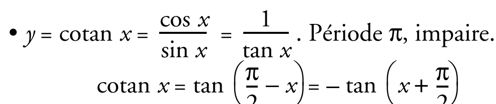
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \searrow$	$\frac{1}{2} \searrow$	$0 \searrow$	-1



• $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Période π, impaire.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \nearrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{3} \nearrow$	$+\infty$



• $y = \text{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$. Période π, impaire.

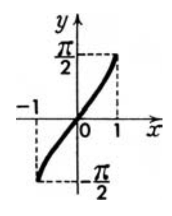
$$\text{cotan}\, x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{cotan}\, x$	$+\infty \searrow$	$\sqrt{3} \searrow$	$1 \searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \searrow$	0

1.9.2 Fonctions circulaires inverses

• $y = \text{Arc}\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$, avec $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq +\dfrac{\pi}{2}$ et $-1 \leq x \leq 1$.

x	-1	0	$+1$
$\text{Arc}\sin x$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$

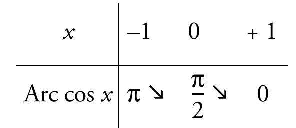


$y = \text{arc}\sin x$.

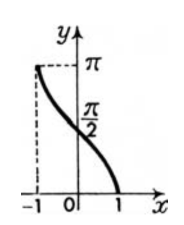
$$= \begin{cases} \text{Arc}\sin x + 2n\pi \\ \pi - \text{Arc}\sin x + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \sin y.$$

(n entier)

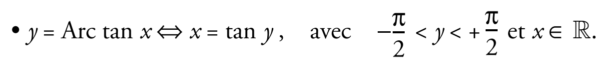
• $y = \text{Arc}\cos x \Leftrightarrow x = \cos y$, avec $0 \leq y \leq \pi$.



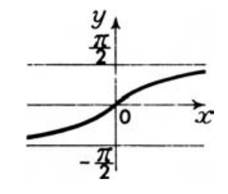
x	-1	0	$+1$
$\text{Arc}\cos x$	$\pi \searrow$	$\frac{\pi}{2} \searrow$	0



$$y = \text{Arc}\cos x = \begin{cases} \text{Arc}\cos x + 2n\pi \\ -\text{Arc}\cos x + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \cos y.$$
(n entier)


• $y = \text{Arc}\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$, avec $-\dfrac{\pi}{2} < y < +\dfrac{\pi}{2}$ et $x \in \mathbb{R}$.

x	$+\infty$	0	$+\infty$
Arc tan x	$-\dfrac{\pi}{2} \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\dfrac{\pi}{2}$



$y = \text{Arc}\tan x$
$= \text{Arc}\tan x + n\pi \Leftrightarrow x = \tan y$
(n entier).

Relations : $\text{Arc}\cos x + \text{Arc}\sin x = \dfrac{\pi}{2}$, avec $x \in [-1, 1]$

$$\text{Arc}\tan u + \text{Arc}\tan v = \text{Arc}\tan \frac{u+v}{1-uv} + n\pi,$$

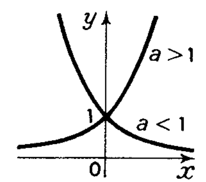
($n = 0$ si $uv < 1$,
$n = +1$ si $uv > 1$, avec u et v positifs,
$n = -1$ si $uv > 1$, avec u et v négatifs).

$$\text{Arc}\tan x + \text{Arc cotan}\, x = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Arc cotan}\, x = \begin{cases} \text{Arc}\tan \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0, \\ \pi + \text{Arc}\tan \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Arc}\tan x + \text{Arc}\tan \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon = \pm 1, \text{ avec } \varepsilon x > 0).$$

1.9.3 Fonction exponentielle $y = a^x$



$a > 1$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	a^x	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	a^x	$+\infty \searrow$	$1 \searrow$	0

si $a' = \frac{1}{a}$, $a'^x = a^{-x}$, les graphes de $y = a^x$ et $y = a'^x$ sont symétriques par rapport à Oy.

1.9.4 Fonction logarithmique $y = \log_a x$

Notation : $\log_a x$ est le logarithme de base a de x ;
$\ln x$ — — — e de x, dit logarithme népérien.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

RELATIONS FONDAMENTALES :

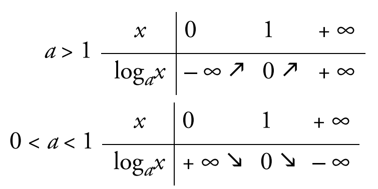
$\log_a a = 1$, $\ln e = 1$ (e, base des logarithmes népériens $\simeq 2{,}718\,28$ ...).

$\log_a u^m = m \log_a u$, $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$.

$\log_a x = \log_a b \times \log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

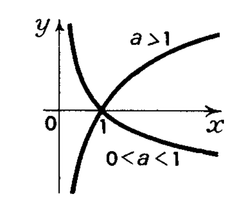
$\log_a b \times \log_b a = 1$,
$\log_{10} x = M.\ln x$, $M \simeq 0{,}434\,29$ ... ;
$e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$.
$\ln (e^x) = x$ pour tout réel x.

Variation :



$a > 1$	x	0	1	$+\infty$
	$\log_a x$	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$	x	0	1	$+\infty$
	$\log_a x$	$+\infty \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty$



1.9.5 Fonction puissance $y = x^m$

$$y = x^m = e^{m \ln x} \text{ défini pour } x > 0$$

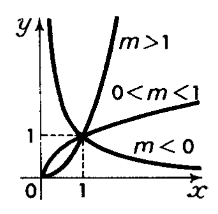
$$\left(x^m \text{ défini aussi pour } x < 0 \text{ si } m \text{ est rationnel de la forme } m = \frac{p}{2q+1}\right)$$

1) $m < 0$

x	0		1		$+\infty$
x^m	$+\infty$	↘	1	↘	0

2) $m > 0$

x	0		1		$+\infty$
x^m	0	↗	1	↗	$+\infty$



1.9.6 Fonctions hyperboliques

(voir : trigonométrie hyperbolique, p. 53)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x + \operatorname{Sh} x = e^x,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{Sh} x = e^{-x},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$y = \operatorname{ch} x$ (paire)

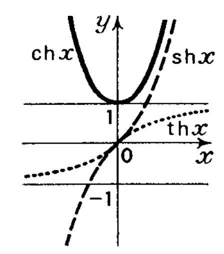
x	0		$+\infty$
ch x	1	↗	$+\infty$

$y = \operatorname{sh} x$ (impaire)

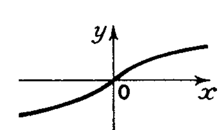
x	0		$+\infty$
sh x	0	↗	$+\infty$

$y = \operatorname{th} x$ (impaire)

x	0		$+\infty$
th x	0	↗	1



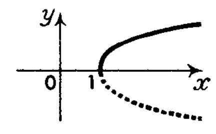
1.9.7 Fonctions hyperboliques inverses



$y = \text{Arg sh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Leftrightarrow x = \text{sh } y$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arg sh x	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

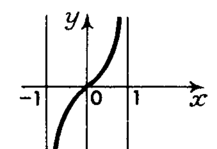
$y = \text{Arg ch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Leftrightarrow x = \text{ch } y$,
avec $y > 0$ (définie pour $x > 1$) .



x	1	$+\infty$
Arg ch x	$0 \nearrow$	$+\infty$

$y = -\text{Arg ch } x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \Leftrightarrow x = \text{ch } y$,
avec $y < 0$ (définie pour $x > 1$).

$$y = \text{Arg th } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \Leftrightarrow x = \text{sh } y$$



(définie pour $-1 < x < 1$).

x	-1	0	$+1$
Arg th x	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES :
Soit l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$.

$$M\text{, coordonnées : } \begin{cases} x = x, \\ y = \sqrt{x^2 - 1}. \end{cases}$$

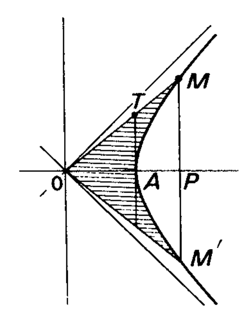
φ = aire du secteur compris entre OM, OM' et l'hyperbole :

$$\varphi = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \text{arg ch } x\,;$$

$\overline{OP} = x = \text{ch}\,\varphi,$

$\overline{PM} = y = \sqrt{x^2 - 1} = \text{sh}\,\varphi,$

$AT = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \text{th}\,\varphi$ (car $OA = 1$).



1.10 Croissance et limites

1.10.1 Croissance comparée

$x \to +\infty, \quad \dfrac{a^x}{x^m} \to +\infty \quad (a > 1,\ m > 0)$;

$x \to +\infty, \quad a^x x^m \to 0 \quad (0 < a < 1,\ m > 0)$;

$x \to +\infty, \quad \dfrac{\log_a x}{x^m} \to +\infty \quad (m > 0)$;

$x \to 0, \quad x^m \log_a x \to 0 \quad (m > 0)$.

1.10.2 Limites remarquables

$$e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} + \cdots \simeq 2{,}71828\ \ldots\ ;$$

$$\lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e, \quad \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x\ ;$$

$$\lim_{\alpha \to 0}(1 + \alpha x)^{1/\alpha} = e^x\ ;$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}\ (x \text{ exprimé en radians}) = 1\ ;$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{\tan x}{x} \quad \text{—} \quad \text{—} \quad = 1\ ;$$

$$\lim_{x \to \infty}\frac{\ln x}{x} = 0\ ;$$

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1\ ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0\ ;$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^n}{n\,!} = 0\ ;$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1\ ;$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

1.10.3 Formes indéterminées. Règle de l'Hospital

Formes indéterminées. — Ce sont des formes qui ne sont pas redevables des règles habituelles sur les limites. Il s'agit de $\frac{\infty}{\infty}$, $(+\infty) + (-\infty)$, $\frac{0}{0}$ et $0 \times \infty$.

Règle de l'Hospital. — Si une expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ se présente au voisinage de a sous une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, et si la limite $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et on a :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Les résultats qui suivent s'obtiennent en utilisant (plusieurs fois successives si c'est nécessaire) la règle de l'Hospital.

Croissances comparées. — Soit $\alpha > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Conséquences et exemples.

– Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^m}$, avec $a > 1$ et $m > 0$. On écrit $\frac{a^x}{x^m} = \frac{1}{x^m e^{-x \ln a}}$.

D'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^m} = +\infty$.

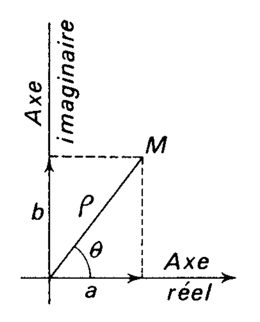
– Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$. On écrit pour $x > 1$, $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, puis par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$.

– Calcul de $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. De même que dans l'exemple précédent, il suffit d'écrire que $x^x = e^{x\ln x}$ et d'utiliser les règles de croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$.

1.11 Nombres complexes ou imaginaires

Définition. — Nombres z de la forme $z = a + b\,\mathrm{i}$, a et b étant des nombres réels et i le nombre imaginaire tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Formes trigonométrique et exponentielle. — En posant :



$$a = \rho\cos\theta, \qquad b = \rho\sin\theta, \text{ avec } \rho \geq 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[,$$

on a

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho e^{\mathrm{i}\theta},$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a};$$

$$\theta = \text{argument},$$

$$\rho = |a + b\,\mathrm{i}| = \sqrt{a^2+b^2} = \text{module}.$$

Addition des imaginaires : $z = a + b\,\mathrm{i}$, $z' = a' + b'\mathrm{i}$

$$z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b').$$

Différence des imaginaires : $z - z' = (a - a') + \mathrm{i}\,(b - b')$.

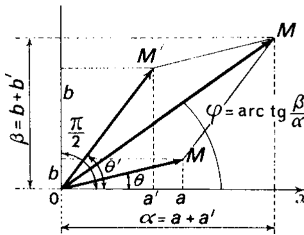
Produit d'imaginaires de la forme :

$z_n = \rho_n (\cos \theta_n + \mathrm{i} \sin \theta_n) = \rho_n \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta_n}$

$Z = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n[\cos (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$

$+ \mathrm{i} \sin (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$

$= \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}.$



Géométriquement : homothétie + rotation (= similitude).
Argument de Z = somme des arguments des z_i.
Module de Z = produit des modules des z_i.

FORMULE DE MOIVRE :

$$(\cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta)^m = \cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}.$$

VALEURS PARTICULIÈRES DE L'IMAGINAIRE :

$\mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 . \mathrm{i} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^2 . \mathrm{i}^2 = 1,$ etc. ;

$\mathrm{i}^{4n} = 1, \quad \mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4n+2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$;

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = -1, \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1,$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$;

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \quad -\mathrm{i} = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{-1}$;

$\mathrm{i}^{\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha/2}, \quad \mathrm{i}^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha/2}, \quad (-\mathrm{i})^{\alpha} = \mathrm{i}^{-\alpha}, \quad \mathrm{i}^{\alpha+1} = -\mathrm{i}^{\alpha-1}.$

La multiplication de $z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ par i soit $\mathrm{i}z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} . \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + \pi/2)}$ équivaut à une rotation de + π/2.
La multiplication par – i, soit $-\mathrm{i}z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} . \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = \rho\, \mathrm{e}^{(\theta - \pi/2)}$ équivaut à une rotation de – π/2.

1.12 Trigonométrie

1.12.1 Trigonométrie plane

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}. \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotan}^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

ADDITION DES ARCS.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$

$$\operatorname{cotan}(a + b) = \frac{\operatorname{cotan} a . \operatorname{cotan} b - 1}{\operatorname{cotan} b + \operatorname{cotan} a},$$

$$\operatorname{cotan}(a - b) = \frac{\operatorname{cotan} a . \operatorname{cotan} b + 1}{\operatorname{cotan} b - \operatorname{cotan} a},$$

$$\cos(a + b + \cdots + l) = \cos a . \cos b \ldots \cos l\,(1 - S_2 + S_4 - \cdots)$$

$$\sin(a + b + \cdots + l) = \cos a . \cos b \ldots \cos l\,(S_1 - S_3 + S_5 + \cdots)$$

$$\tan(a + b + \cdots + l) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 + \cdots}{1 - S_2 + S_4 - \cdots},$$

S_p désignant la somme des produits p à p de tan a, tan b, ..., tan l.

$$\operatorname{arc\,cos} a + \operatorname{arc\,cos} b = \operatorname{arc\,cos}\left[ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}\right]$$

$$\operatorname{arc\,sin} a + \operatorname{arc\,sin} b = \operatorname{arc\,sin}\left[a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}\right]$$

$$\text{arc tan } a + \text{arc tan } b = \text{arc tan } \frac{a+b}{1-ab}$$

$$\text{arc cotan } a + \text{arc cotan } b = \text{arc cotan } \frac{ab-1}{a+b} \cdot$$

MULTIPLICATION DES ARCS ET FORMULE DE MOIVRE.

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a},$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a},$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \cdot$$

$$(\cos a + \mathrm{i} \sin a)^n = \cos na + i \sin na,$$

$$\cos na = \cos^n a - \mathrm{C}_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + \mathrm{C}_n^4 \cos^{n-4} a \sin^4 \mathrm{a} - \cdots,$$

$$\sin na = \mathrm{C}_n^1 \cos^{n-1} a \sin a - \mathrm{C}_n^3 \cos^{n-3} a \sin^3 \mathrm{a} + \cdots,$$

$$\tan na = \frac{\mathrm{C}_n^1 \tan a - \mathrm{C}_n^3 \tan^3 a + \cdots}{1 - \mathrm{C}_n^2 \tan^2 a + \mathrm{C}_n^4 \tan^4 a - \cdots},$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a = 4\cos^3 a - 3\cos a,$$

$$\sin 3a = 3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a} \cdot$$

DIVISION DES ARCS :

$$\sin \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}, \qquad \cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

$$\tan \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2 a}}{\tan a}$$

$$= \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a},$$

$$\sin a = \mathrm{C}_m^1 \cos^{m-1} \frac{a}{m} \sin \frac{a}{m} - \mathrm{C}_m^3 \cos^{m-3} \frac{a}{m} \sin^3 \frac{a}{m} + \cdots,$$

$$\cos a = \cos^m \frac{a}{m} - C_m^2 \cos^{m-2} \frac{a}{m} \sin^2 \frac{a}{m} + C_n^4 \cos^{m-4} \frac{a}{m} \sin^4 \frac{a}{m} - \cdots,$$

$$\tan a = \frac{C_m^1 \tan \frac{a}{m} - C_m^3 \tan^3 \frac{a}{m} + \cdots}{1 - C_m^2 \tan^2 \frac{a}{m} + C_m^4 \tan^4 \frac{a}{m} + \cdots}.$$

EXPRESSION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES EN FONCTION DE LA TANGENTE DE L'ARC MOITIÉ :

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}, \quad \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}, \quad \tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}.$$

TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q},$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q},$$

$$\operatorname{cotan} p + \operatorname{cotan} q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \cdot \sin q},$$

$$\operatorname{cotan} p - \operatorname{cotan} q = \frac{-\sin(p-q)}{\sin p \cdot \sin q},$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}, \quad \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2},$$

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}, \quad \tan^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}.$$

$$1 + \sin a = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right), \quad 1 - \sin a = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right),$$

$$\frac{1-\sin a}{1+\sin a} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right), \quad \frac{1-\tan a}{1+\tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right),$$

$$\sin a + \cos b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\sin a - \cos b = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos a - \sin b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\cos a - \sin b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\tan a + \mathrm{cotan}\, b = \frac{\cos(a-b)}{\cos a . \sin b},$$

$$\tan a - \mathrm{cotan}\, b = \frac{-\cos(a+b)}{\cos a . \sin b},$$

$$\sin a . \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \;;\; \cos a . \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$

$$\sin a . \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \;;\; \sin b . \cos a = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$$

$$\tan a . \tan b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\cos(a-b)+\cos(a+b)} \;;\; \frac{\tan a}{\tan b} = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{\sin(a+b)+\sin(a-b)}.$$

$$\cos(a+b).\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$$
$$\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DE QUELQUES ARCS.

Arc en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Angles en degrés	0	30	45	60	90	180	270
sin........................	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	– 1
cos........................	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1	0
tan.......................	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
cotan..................	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

SOMMES DE SINUS ET DE COSINUS D'ARCS EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE :

$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \cdots + \sin[a+(n-1)h] =$

$$= \frac{\sin\left[a + \frac{(n-1)h}{2}\right]\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}},$$

$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \cdots + \cos[a+(n-1)h] =$

$$= \frac{\cos\left[a + \frac{(n-1)h}{2}\right]\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}},$$

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE
(Voir : géométrie du triangle, p. 209.)

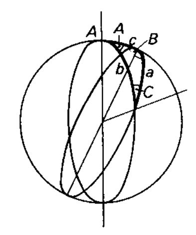
1.12.2 Trigonométrie sphérique

DÉFINITIONS :

$a + b + c = 2p$ = périmètre du triangle sphérique ABC,

$A + B + C = 2S$,

$A + B + C - \pi = 2\varepsilon = (2S - \pi)$; 2ε = excès sphérique.



RELATIONS GÉNÉRALES :

$b + c > a > b - c$,

$a + b + c < 2\pi$,

$\pi < A + B + C < 3\pi$,

$A + \pi > B + C$,

$0 < 2\varepsilon < 2\pi$.

FORMULES FONDAMENTALES.

I. $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$.

II. $\begin{cases} \cos a = \cos b.\cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$

III. Relations parallèles :

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

IV. $\operatorname{cotan} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotan} A,$

$\operatorname{cotan} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotan} A,$

$\operatorname{cotan} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotan} B,$

$\operatorname{cotan} b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotan} B,$

$\operatorname{cotan} c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \operatorname{cotan} C,$

$\operatorname{cotan} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotan} C.$

RELATIONS IMPORTANTES.

V. $\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b.\sin c}} \\ \cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin p.\sin(p-a)}{\sin b.\sin c}} \end{cases}$ Relation correspondantes pour B et C

VI. $\begin{cases} \sin\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{-\cos S.\cos(S-A)}{\sin B.\sin C}} = \sqrt{\dfrac{\sin \varepsilon.\sin(A-\varepsilon)}{\sin B.\sin C}} \\ \cos\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(S-B).\cos(S-C)}{\sin B.\sin C}} = \sqrt{\dfrac{\sin(B-\varepsilon).\sin(C-\varepsilon)}{\sin B.\sin C}} \end{cases}$

Relation correspondantes pour B et C.

VII. $\text{cotan}\,\varepsilon = \dfrac{\text{cotan}\dfrac{a}{2}.\text{cotan}\dfrac{b}{2} + \cos C}{\sin C}$.

VIII. $\tan\dfrac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\tan\dfrac{p}{2}.\tan\dfrac{p-a}{2}.\tan\dfrac{p-b}{2}.\tan\dfrac{p-c}{2}}$.

IX. *Formules de Delambre* :

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

X. *Formules de Néper* :

$$\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}, \quad \tan\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}.\text{cotan}\frac{C}{2}\ ;$$

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}, \quad \tan\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}.\text{cotan}\frac{C}{2}.$$

XI. *Triangles rectangles,* $C = \pi/2$, c = *hypoténuse* :

$$\cos c = \cos a.\cos b = \text{cotan}\,A.\text{cotan}\,B,$$

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}, \qquad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A},$$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad \cos A = \frac{\tan b}{\tan c}, \qquad \tan A = \frac{\tan a}{\sin b}.$$

XII. *Surface d'un triangle sphérique* :

$$S = (A + B + C - \pi)\,\rho^2 = 2\,\varepsilon\rho^2, \qquad \rho = \text{rayon de la sphère.}$$

Rayons sphériques R et r du cercle circonscrit et du cercle inscrit à un triangle sphérique :

$$\sin R = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\left(\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}\right)\left(\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}-\sin\frac{c}{2}\right)\times \times\left(\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\right)\left(\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{c}{2}-\sin\frac{a}{2}\right)}}$$

$$\tan R = \sqrt{\frac{\sin\,\varepsilon}{\sin(A-\varepsilon)\sin(B-\varepsilon)\sin(C-\varepsilon)}}$$

$$\tan r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$$

1.12.3 Trigonométrie hyperbolique

DÉFINITIONS :

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

D'où : $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \text{es}$, $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$.

RELATIONS FONDAMENTALES

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a,$$

$$\text{sh}\,(a - b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b - \text{sh}\,b\,\text{ch}\,a,$$

$$\text{th}\,(a + b) = \frac{\text{th}\,a + \text{th}\,b}{1 + \text{th}\,a\,\text{th}\,b}\ ; \quad \text{th}\,(a - b) = \frac{\text{th}\,a - \text{th}\,b}{1 - \text{th}\,a\,\text{th}\,b},$$

$$\text{ch}\,p + \text{ch}\,q = 2\,\text{ch}\,\frac{p+q}{2}\,\text{ch}\,\frac{p-q}{2},$$

$$\text{ch}\,p - \text{ch}\,q = 2\,\text{sh}\,\frac{p+q}{2}\,\text{sh}\,\frac{p-q}{2},$$

$$\text{sh}\,p + \text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\,\frac{p+q}{2}\,\text{ch}\,\frac{p-q}{2},$$

$$\text{sh}\,p - \text{sh}\,q = 2\,\text{sh}\,\frac{p-q}{2}\,\text{ch}\,\frac{p+q}{2},$$

$$\text{th}\,p + \text{th}\,q = \frac{\text{sh}(p+q)}{\text{ch}\,p\,\text{ch}\,q},$$

$$\text{th}\,p - \text{th}\,q = \frac{\text{sh}(p-q)}{\text{ch}\,p\,\text{ch}\,q},$$

$$\text{ch}\,(a + b + \cdots + l) = \text{ch}\,a.\text{ch}\,b \ldots \text{ch}\,l\,(1 + S_2 + S_4 + S_6 + \cdots),$$

$$\text{sh}\,(a + b + \cdots + l) = \text{ch}\,a.\text{ch}\,b \ldots \text{ch}\,l\,(S_1 + S_3 + S_5 + \cdots),$$

$$\text{th}\,(a + b + \cdots + l) = \frac{S_1 + S_3 + S_5 + \cdots}{1 + S_2 + S_4 + \cdots},$$

en désignant par S_p la somme des produits p à p des quantités th a, th b, ..., th l.

MULTIPLICATION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

$$\text{ch}\,2\,a = \text{ch}^2\,a + \text{sh}^2\,a = 2\,\text{ch}^2\,a - 1 = 2\,\text{sh}^2\,a + 1 = \frac{1 + \text{th}^2\,a}{1 - \text{th}^2\,a},$$

$$\text{sh}\,2\,a = 2\,\text{sh}\,a\,\text{ch}\,a = \frac{2\,\text{th}\,a}{1 - \text{th}^2\,a},$$

$$\text{th}\,2\,a = \frac{2\,\text{th}\,a}{1 + \text{th}^2\,a}\ ;$$

$$\text{ch}^2\,\frac{a}{2} = \frac{\text{ch}\,a + 1}{2},$$

$$\text{sh}^2\,\frac{a}{2} = \frac{\text{ch}\,a - 1}{2},$$

$$\text{th}\,\frac{a}{2} = \frac{\text{sh}\,a}{\text{ch}\,a+1} = \frac{\text{ch}\,a-1}{\text{sh}\,a} = \pm\sqrt{\frac{\text{ch}\,a-1}{\text{ch}\,a+1}},$$

$(\text{ch}\,a + \text{sh}\,a)^n = \text{ch}\,na + \text{sh}\,na = e^{na}$,

$$\text{ch}\,na = \text{ch}^n\,a + C_n^2\,\text{ch}^{n-2}\,a\,\text{sh}^2\,a + C_n^4\,\text{ch}^{n-4}\,a\,\text{sh}^4\,a + \cdots,$$

$$\text{sh}\,na = C_n^1\,\text{ch}^{n-1}\,a\,\text{sh}\,a + C_n^3\,\text{ch}^{n-3}\,a\,\text{sh}^3\,a + \cdots,$$

$$\text{th}\,na = \frac{C_n^1\,\text{th}\,a + C_n^3\,\text{th}^3 a + C_n^5\,\text{th}^5 a + \cdots}{1 + C_n^2\,\text{th}^2 a + C_n^4\,\text{th}^4 a + \cdots},$$

$$\text{ch}\,3\,a = \text{ch}^3\,a + 3\,\text{ch}\,a\,\text{sh}^2\,a = 4\,\text{ch}^3\,a - 3\,\text{ch}\,a,$$

$$\text{sh}\,3\,a = 3\,\text{ch}^2\,a\,\text{sh}\,a + \text{sh}^3\,a = 4\,\text{sh}^3\,a + 3\,\text{sh}\,a,$$

$$\text{th}\,3\,a = \frac{3\,\text{th}\,a + \text{th}^3 a}{1 + 3\,\text{th}^2 a}.$$

EXPRESSION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES EN FONCTION DE $\text{th}\,\frac{a}{2}$.

$$\text{ch}\,a = \frac{1+\text{th}^2\frac{a}{2}}{1-\text{th}^2\frac{a}{2}}, \quad \text{sh}\,a = \frac{2\,\text{th}\,\frac{a}{2}}{1-\text{th}^2\,\frac{a}{2}}, \quad \text{th}\,a = \frac{2\,\text{th}\,\frac{a}{2}}{1+\text{th}^2\,\frac{a}{2}},$$

SOMME DE sh ET ch EN PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

$$\text{ch}\,a + \text{ch}\,(a+h) + \cdots + \text{ch}\,[a+(n-1)\,h] = \frac{\text{ch}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\text{sh}\frac{nh}{2}}{\text{sh}\frac{h}{2}}$$

$$\text{sh}\,a + \text{sh}\,(a+h) + \cdots + \text{sh}\,[a+(n-1)\,h] = \frac{\text{sh}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\text{sh}\frac{nh}{2}}{\text{sh}\frac{h}{2}}$$

1.12.4 Relations entre imaginaires et fonctions circulaires, hyperboliques et logarithmiques

Formule de Moivre : $(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^m = \cos mx + \mathrm{i} \sin mx = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$.

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$

$$\cos \mathrm{i}x = \mathrm{ch}\, x, \quad \sin \mathrm{i}x = \mathrm{i}\, \mathrm{sh}\, x, \quad \tan x = \mathrm{i}\, \mathrm{th}\, x,$$

$$\cos x = \mathrm{ch}\, \mathrm{i}x, \quad \sin x = \frac{1}{\mathrm{i}} \mathrm{sh}\, \mathrm{i}x, \quad \tan x = \frac{1}{\mathrm{i}} \mathrm{th}\, \mathrm{i}x,$$

$$\mathrm{arc}\sin x = -\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\,\mathrm{sh}\, \mathrm{i}x = -\mathrm{i} \ln (\mathrm{i}x + \sqrt{1 - x^2}),$$

$$\mathrm{arc}\cos x = -\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\,\mathrm{ch}\, x = \pm \mathrm{i} \ln (\mathrm{x} + \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2}),$$

$$\mathrm{arc}\tan x = -\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\,\mathrm{th}\, \mathrm{i}x = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \ln \frac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x},$$

$$\mathrm{arc}\,\mathrm{cotan}\, x = \mathrm{i}\, \mathrm{arg}\,\mathrm{coth}\, \mathrm{i}x = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \ln \frac{\mathrm{i}x - 1}{\mathrm{i}x + 1},$$

$$\mathrm{arc}\sin \mathrm{i}x = \mathrm{i}\, \mathrm{arg}\,\mathrm{sh}\, x = \mathrm{i} \ln (x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$\mathrm{arc}\cos \mathrm{i}x = -\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\,\mathrm{ch}\, \mathrm{i}x = \frac{\pi}{2} \pm \mathrm{i} \ln (x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$\mathrm{arc}\tan \mathrm{i}x = \mathrm{i}\, \mathrm{arg}\,\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{i}}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

1.13 Séries

Définition. — Etant donné une suite infinie :

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n,$$

la série de terme général u_n est *convergente* si la somme :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

tend vers une limite finie quand n → l'infini. Sinon elle est *divergente*.

1.13.1 Séries numériques à termes positifs

RÈGLES DE D'ALEMBERT ($u_n > 0$).

1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$ $(\forall n > N)$, il y a convergence.

2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ $(\forall n > N)$, il y a divergence.

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\begin{cases} l < 1 & \text{il y a convergence,} \\ l > 1 & \text{il y a divergence,} \\ l = 1 & \text{incertitude.} \end{cases}$

Mais, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ en décroissant, il y a divergence.

RÈGLES DE CAUCHY ($u_n > 0$).

1) $\sqrt[n]{u_n} \leq k < 1$ $(\forall n > N)$, il y a convergence,

2) $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ $(\forall n > N)$, il y a divergence,

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ $\begin{cases} l < 1 & \text{il y a convergence,} \\ l > 1 & \text{il y a divergence,} \\ l = 1 & \text{incertitude.} \end{cases}$

Mais, si $\sqrt[n]{u_n} \to 1$ en décroissant, il y a divergence.

COMPARAISON A A/n^{α} ($u_n > 0$). (Règles de Riemann.)

1) $u_n \sim \dfrac{A}{n^{\alpha}}$ $\begin{cases} \alpha > 1, \text{ il y a convergence,} \\ \alpha \leq 1, \text{ il y a divergence,} \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\alpha} u_n = 0,$ $\alpha > 1$, il y a convergence,

3) $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\alpha} u_n = \infty,$ $\alpha \leq 1$, il y a divergence.

RÈGLES DE DUHAMEL ($u_n > 0$).

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}.$$

1) $n\alpha_n \geq k < 1$ $(\forall n > N)$, il y a convergence,

2) $n\alpha_n \leq 1$ $(\forall n > N)$, il y a divergence.

3) $\lim\limits_{n \to \infty} n\alpha_n = l$ $\begin{cases} l < 1, & \text{il y a convergence,} \\ l > 1, & \text{il y a divergence,} \\ l = 1, & \text{incertitude.} \end{cases}$

SÉRIES DE BERTRAND

Posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$. La série de terme général u_n converge si, et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

1.13.2 Séries alternées

Séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs (série alternée) et vont en diminuant en valeur absolue.
Convergente si le terme général $u_n \to 0$.

1.13.3 Séries à termes de signes quelconques

La série est convergente si la série formée des valeurs absolues (ou modules) des termes est convergente.
La réciproque n'est pas vraie.

■ Formules de Taylor et de Mac-Laurin

FORMULE DE TAYLOR.

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n.$$

Reste : $R_n = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h), \quad 0 < 0 < 1,$

si $f, f', \ldots, f^{(n)}$ définies et continues pour $x \in [a, a + h]$, $f^{(n+1)}$ définie pour $x \in \,]a, a + h[$.

■ Reste de la somme d'une série

a) Si la convergence a été reconnue au moyen de la régie $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < K$, le reste de la série est inférieur à $\frac{u_{p+1}}{1-K}$, u_{p+1} étant le premier terme négligé.

b) Si la convergence a été reconnue au moyen de la règle de Cauchy et si $\sqrt[n]{u_n} < K$, le reste de la série est inférieur à $\frac{K^{p+1}}{1-K}$, $p + 1$ étant l'ordre du premier terme négligé.

c) Si la convergence a été reconnue par la recherche de l'ordre infinitésimal $\alpha > 1$ du terme général de la série, le produit $n^{\alpha}u_n$ reste inférieur à un nombre fixe K. Le reste de la série est inférieur à

$$\frac{K}{(p+1)^{\alpha-1}} \times \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1},$$

$(p + 1)$ étant le rang du premier terme négligé.
d) Si la série est absolument convergente, on prendra le reste de la série des modules.
e) Si la série est alternée, le reste est inférieur en module au premier terme négligé.

1.13.4 Développements usuels en séries entières

A)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1\,!} + \frac{(x \ln a)^2}{2\,!} + \cdots + \frac{(x \ln a)^n}{n\,!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + \cdots,$$

$$\sin x = x = -\frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \cdots,$$

$$\text{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + \cdots,$$

$$\text{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \cdots.$$

Ces développements sont valables pour toute valeur de x.

B)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots,$$

$$\text{Arc tan}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

$$\text{Arg th}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2\,!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n\,!}x^n + \cdots,$$

quel que soit m réel

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}x^n + \cdots,$$

$$\text{Arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

$$\text{Arc sh}\, x = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}x^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \cdots,$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1.2}{3.6}x^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4 + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 - \cdots.$$

Ces développements ne sont valables que pour $|x| < 1$.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right), \qquad |x| < 1,$$

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots\right), \qquad |x| > 1,$$

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right], \qquad x > 0,$$

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + = \text{arg sh } x, \quad |x| \leq 1,$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^2}{3^2.5.7} + \frac{62x^9}{3^2.5.7.9} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{cotan } x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2.5} - \frac{2x^5}{3^2.5.7} - \frac{x^7}{3^2.5^2.7} - \cdots, \qquad 0 < |x| < \pi,$$

$$\text{arc tan } x = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 - \cdots, \qquad x \geq 0,$$

$$\sin x.\text{sh } x = \frac{2}{2\,!}x^2 - \frac{2^3}{6\,!}x^6 + \frac{2^5}{10\,!}x^{10} - \cdots,$$

$$\sin x.\text{ch } x = x + \frac{2}{3\,!}x^3 - \frac{2^2}{5\,!}x^5 - \frac{2^3}{7\,!}x^7 + \cdots,$$

$$\cos x.\text{sh } x = x - \frac{2}{3\,!}x^3 - \frac{2^2}{5\,!}x^5 + \frac{2^3}{7\,!}x^7 - \cdots,$$

$$\cos x.\text{ch } x = 1 - \frac{2^2}{4\,!}x^4 + \frac{2^4}{8\,!}x^8 - \frac{2^6}{12\,!}x^{12} + \cdots,$$

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x-3\pi} + \frac{1}{x+3\pi} + \cdots.$$

1.13.5 Nombres de Bernoulli et séries s'y rattachant

Les nombres de Brenoulli sont les coefficients des termes du développement en série de la fonction $\frac{x}{e^x - 1}$:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \frac{B_1 x}{1\,!} + \frac{B_2 x^2}{2\,!} + B_4\frac{x^4}{4\,!} + \frac{B_6 x^6}{6\,!} + \cdots \text{ pour } |x| < 2\,\pi.$$

Les nombres de Bernoulli se calculent par la formule $B_n = (B+1)^n$ dans laquelle les puissances B^λ sont remplacées dans le second membre par B_λ à partir de $n = 2$, ce qui entraîne

$B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$ (tous les B d'indice impair sont nuls, à l'exception de B_1).

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = -\frac{5}{66}.$$

Séries s'exprimant au moyen des nombres de Bernoulli.

$$\ln \sin x = \ln x - B_2 \frac{(2x)^2}{2.2\,!} + B_4 \frac{(2x)^4}{4.4\,!} - B_4 \frac{(2x)^6}{6.6\,!} + \cdots, \qquad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\ln \cos x = -(2^2-1)\, B_2 \frac{(2x)^2}{2.2\,!} + (2^4-1)\, B_4 \frac{(2x)^4}{4.4\,!} + \cdots$$
$$- (2^6-1)\, B_6 \frac{(2x)^6}{6.6\,!} + \cdots, \ |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\ln \tan x = \ln x + (2^2-2)\, B_2 \frac{(2x)^2}{2.2\,!} - (2^4-2)\, B_4 \frac{(2x)^4}{4.4\,!} +$$
$$+ (2^6-2)\, B_6 \frac{(2x)^6}{6.6\,!} - \cdots, \ |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$x \tan x = (2^2-1)\, B_2 \frac{(2x)^2}{2\,!} - (2^4-1)\, B_4 \frac{(2x)^4}{4\,!} +$$
$$+ (2^6-1)\, B_6 \frac{(2x)^6}{6\,!} - \cdots, \ |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$x \,\mathrm{cotan}\, x = 1 - B_2 \frac{(2x)^2}{2\,!} + B_4 \frac{(2x)^4}{4\,!} - B_6 \frac{(2x)^6}{6\,!} + \cdots, \qquad |x| < \pi.$$

(Voir note relative au calcul des nombres de Bernoulli).

1.13.6 Nombres d'Euler et séries s'y rattachant

Les nombres d'Euler sont définis par les formules de récurrence suivantes :

$$C_2^{2n}\, E_1 - C_4^{2n}\, E_2 + C_6^{2n}\, E_3 + \cdots + (-1)^n E_n = 1, \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 5, \quad E_3 = 61, \quad E_4 = 1\,385, \quad E_5 = 50\,521.$$

Séries s'exprimant en fonction des nombres d'Euler.

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{E_1 x^2}{2\,!} + \frac{E_2 x^4}{4\,!} + \frac{E_3 x^6}{6\,!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = x + E_1 \frac{x^3}{3\,!} + E_2 \frac{x^5}{5\,!} + E_3 \frac{x^7}{7\,!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

1.13.7 Sommes de séries

Le calcul exact de la somme d'une série convergente ne peut s'effectuer que dans des cas particuliers : en général on ne pourra calculer ladite somme que

par approximations. Nous donnons ci-dessous quelques cas où le calcul exact de la somme de certaines séries est possible.

SÉRIE GÉOMÉTRIQUE ET SÉRIES EN DÉRIVANT :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{quand } x < 1.$$

En dérivant :

$$1 + 2\,x + 3\,x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$2 + 2.3\,x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2 \simeq 0{,}693\,147.$$

$$(\ln\,(1+x) \quad \text{dans laquelle} \quad x = 1)\,.$$

Série $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \cdots = \ln 2 \left[\ln(1-x) \;\text{ pour }\; x = \frac{1}{2}\right].$

SÉRIE DE TERME GÉNÉRAL $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots - \left(\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n}{n-1}\right) - \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots - \ln n - \ln\frac{n+1}{n} \to C.$$

$$C = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right] \simeq 0{,}577\,215.$$

C = *constante d'Euler.*

SÉRIE HARMONIQUE (DIVERGENTE). Somme des n premiers termes :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \frac{1}{2\,n} - \frac{B_2}{2\,n^2} - \frac{B_4}{4\,n^4} - \frac{B_{2k}}{(2\,k)\,n^{2k}} - \cdots$$

C = constante d'Euler. B_{2k} = nombres de Bernoulli.

SÉRIE $\frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)$. Fonction de Riemann, $\alpha > 1$.

Valeurs entières de α.

$$\sum \frac{2}{n^{2p}} = \frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \cdots + \frac{1}{n^{2p}} + \cdots = \frac{2^{2p}\,\pi^{2p}}{2(2\,p)\,!}\left|B_{2p}\right|, \quad p = 1, 2, 3, ;$$

$$p = 1, \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$p = 2, \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2\,n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2\,n)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{24},$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{7\pi^4}{720},$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}.$$

— *Sommations* :

$$\sum_{-\infty < n < +\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{-\infty < n < +\infty \\ n \neq 0}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

En intégrant en z :

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\,z}{z^2 - n^2}.$$

1.13.8 Séries de Fourier

Soit f une fonction définie pour $-x < x < \pi$. Cette fonction étant supposée intégrable et obéissant dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ aux conditions suivantes dites conditions de Dirichlet :

1° la fonction est bornée ;

2° elle a un nombre fini de maximums et de minimums ;
3° elle n'est discontinue qu'en un nombre fini de points.

En dehors des points de discontinuité, elle peut être représentée par une série trigonométrique dite série de Fourier, de la forme suivante :

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots,$$

dans laquelle les coefficients a et b sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ \cos nx\,\mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ \sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Si f paire dans $(-\pi, +\pi)$, tous les $b_n = 0$.
Si f impaire dans $(-\pi, +\pi)$, a_0 et tous les $a_n = 0$.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE DE PÉRIODE T QUELCONQUE

On pose $x = \dfrac{2\pi t}{T} = \omega t, \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{T}\ t + B_1 \sin \frac{2\pi}{T}\ t + \cdots + A_n \cos \frac{2n\pi}{T}\ t + B_n \sin \frac{2n\pi}{T}\ t + \cdots,$$

avec :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\,\mathrm{d}x,\ A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\ \cos n\omega t\,\mathrm{d}x,$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\ \sin n\omega t\,\mathrm{d}x.$$

A_n *et* B_n sont appelés « coefficients de Fourier de la fonction f ».

APPLICATIONS ET EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS

Développement de $x \to \cos(\lambda x)$, λ quelconque non entier :

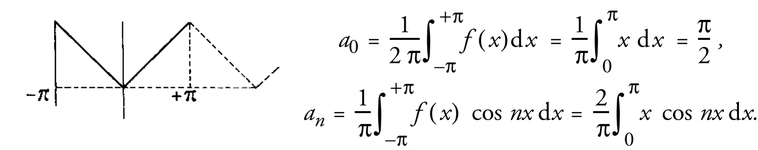
$$\cos \lambda x = \frac{\lambda \sin \lambda\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\cos x}{\lambda^2 - 1} + \frac{2\cos 2x}{\lambda^2 - 4} - \cdots (-1)^n + \frac{2\cos nx}{\lambda^2 - n^2} + \cdots\right].$$

Développement de $x \to \sin(\lambda x)$

$$\sin \lambda x = \frac{2\sin \lambda\pi}{\pi}\left[-\frac{\sin x}{\lambda^2 - 1} + \frac{2\sin 2x}{\lambda^2 - 4} + \cdots (-1)^n + \frac{n\sin nx}{\lambda^2 - n^2} + \cdots\right].$$

Développement de la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x & \text{pour} \quad -\pi < x < 0 \\ f(x) = x & \text{pour} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

Fonction paire. Tous les coefficients $b_n = 0$:



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\ \cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Intégrons par parties : $x = u, \quad \mathrm{d}v = \cos nx\,\mathrm{d}x$;

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u, \quad v = \frac{1}{n}\sin nx.$$

$$\int_0^{\pi} x\ \cos nx\,\mathrm{d}x = \left|\frac{x}{n}\sin nx\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1).$$

Si n pair, $a_n = 0$; si n impair, $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$. Donc :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right).$$

Si $x = 0$, on a :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right),$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Développement d'une fonction impaire de période $2l$ égale à $p(x)$ dans l'intervalle $[0, l]$, avec $p(x) = p$ sur OB et 0 sur BA :

$$p(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad -l < x < -\frac{l}{2},$$

$$\text{—} = -p \qquad \text{pour} \quad -\frac{l}{2} < x < 0,$$

$$— = +p \quad \text{pour} \quad 0 < x < \frac{l}{2},$$

$$— = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{l}{2} < x < l,$$

$$T = 2\,l = \frac{2\,\pi}{\omega}, \quad \omega = \frac{\pi}{l}\;; \quad u = \omega x, \quad x = \frac{u}{\omega}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} p\left(\frac{u}{\omega}\right) \sin nu\, \mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p\left(\frac{u}{\omega}\right) \sin nu\, \mathrm{d}u,$$

$$p\left(\frac{u}{\omega}\right) = p \text{ dans l'intervalle } 0, \frac{\pi}{2}\;;$$

$$p\left(\frac{u}{\omega}\right) = — \quad — \quad \frac{\pi}{2}, \pi.$$

$$b_n = \frac{2p}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin nu\, \mathrm{d}u = \frac{2\,p}{\pi}\left|-\frac{\cos\, nu}{n}\right|_0^{\pi/2} = \frac{2\,p}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

D'où le développement :

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,p}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{l}\, x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{2\,p}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{l} + \sin\frac{2\pi}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{l} + \cdots(\text{terme en } n_4 = 0) + \cdots\right].$$

1.13.9 Intégration et dérivation des séries de Fourier

Une fonction f définie dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ et remplissant dans cet intervalle, les conditions de Dirichlet peut être intégrée et dérivée dans cet intervalle, à condition d'opérer séparément dans les intervalles où elle est continue.

1° *Intégration.* — Soit $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0\, x + \frac{a_1}{1} \sin x + \frac{b_1}{1}(1 - \cos x) + \cdots + \frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n}(1 - \cos nx) + \cdots.$$

On n'obtient pas, dans ce cas, une série de Fourier en raison de la présence du terme $a_0\, x$.

2° *Dérivation.* — Soit la dérivée f' développée en série de Fourier.

$$f'(x) = a'_0 + a'_1 \cos x + b' \sin x + \cdots + a'_n \cos nx + b'_n \sin nx + \cdots.$$

Calculons les coefficients $a'_0, \ldots, a'_n, b'_n$:

$$2\pi a'_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\,dx.$$

Si l'on tient compte des discontinuités de f dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, on a

$$a'_0 = \frac{1}{2\pi}\left[s_0 - \sum_1^p s_k\right],$$

p étant le nombre de discontinuités dans $(-\pi, +\pi)$

$$s_0 = f(\pi - 0) - f(-\pi + 0),$$

$$s_k = f(x_k + 0) - f(x_k - 0),$$

c'est-à-dire les sauts de la fonction aux points x_k.
De même :

$$a'_n = \left[\frac{1}{\pi}(-1)^n s_0 - \sum_1^p s_k \cos nx_k\right] + nb_n,$$

$$b'_n = -\frac{1}{\pi}\sum_1^p s_k \sin nx_k - na_n.$$

Ces formules permettent de former le développement d'une fonction non continue en partant de sa dérivée, dans le cas où cette dernière est continue.

Exemple. — Fonction égale à $\begin{cases} -1 \text{ dans lintervalle } -\pi, 0 \ ; \\ +1 \quad — \quad — \quad 0, \pi. \end{cases}$

La dérivée de cette fonction est nulle et tous les coefficients a'_0, a'_n, b'_n sont nuls, $s_0 = 2$. Une seule discontinuité pour $x = 0$, pour laquelle $s_k = 2$.
On a donc $0 = -na_n$, soit $a_n = 0$,

$$0 = \frac{1}{\pi}(-1)^n 2 - 2 + nb_n, \quad b_n = \frac{2}{\pi n}[1 - (-1)^n] \ ;$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2p-1)x}{2p-1} + \cdots\right].$$

Faisant $x = \pi/2$ par exemple, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{4}{\pi}.$$

1.13.10 Produits infinis

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdots$$

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

$$\operatorname{sh} x = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

$$\operatorname{ch} x = \left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

Formule de Stirling :

$$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1 + \theta_n}{288n^2}\right)$$

avec $\theta_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

2 • ANALYSE

2.1 Dérivées et différentielles

Nombre dérivé. — Le nombre dérivé d'une fonction f en a, s'il existe, est défini par

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On le note également parfois $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Géométriquement, le nombre dérivé d'une fonction f au point a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a. Cette tangente a d'ailleurs pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Fonction dérivée. — C'est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Différentielle. — La différentielle $\mathrm{d}f(a)$ de la fonction f au point a est l'application linéaire telle que : $f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + h\varepsilon(h)$, où ε est une fonction telle que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Si f est dérivable en a, elle y est également différentiable et $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto f'(a).h$, si bien que :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a).h + h\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Cette écriture s'appelle également *développement limité à l'ordre* 1 de f au voisinage de a.

2.1.1 Règles de dérivation

u et v sont des fonctions de la variable x dérivables sur un intervalle I. λ est un nombre réel donné, et m un entier relatif non nul donné.

Fonction	Dérivée
$u+\lambda v$	$u'+\lambda v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^m	$mu'u^{m-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

DÉRIVÉE DE FONCTIONS INVERSES OU RÉCIPROQUES.

Soit $f : I \to J$ une application bijective. On appelle $f^{-1} : J \to I$ son application réciproque. Si f est dérivable sur I et si $x \in J$ est tel que $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$, alors :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE DE FONCTIONS.

Soient $u : I \to J$ et $v : J \to K$, deux fonctions dérivables sur leur intervalle de définition. Alors $v \circ u$ est dérivable, de dérivée $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v' \circ u(x)$.

2.1.2 Dérivées

DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES SIMPLES.

Fonctions :	Dérivées :
x^m	mx^{m-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
a^x	$e^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$ (x en radians)
$\sin x$	$\cos x$ (x en radians)
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \tan^2 x$ (x en radians)
$\text{cotan}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$ ou $-(1 + \text{cotan}^2 x)$ (x en radians)
$\text{Arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Fonctions :	Dérivées :
Arc cos x	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arc tan x	$\frac{1}{1+x^2}$
ch x	*sh x*
sh x	*ch x*
th x	$\frac{1}{ch^2 x}$ ou $1 - \text{th}^2\, x$
coth x	$-\frac{1}{sh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
arg sh $x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
arg ch $x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $x > 1$
arg th $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$
arg coth $x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$ $x < -1$ ou $x > 1$

DÉRIVÉES D'ORDRE n.

Fonctions :	Dérivées n-ièmes :
x^m	$m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$
a^x	$a^x(\ln a)n$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
$\cos x$	$\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin x$	$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$
$\ln(1+x)$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

Formule de Leibniz : u et v fonctions de x,

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \ldots + C_n^p u^{(n-p)} + \ldots + uv^{(n)}$$

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION IMPLICITE : $f(x, y) = 0$.

Dérivée de y considérée comme fonction de x : $y' = \frac{-f'_x}{f'_y}$; f'_x, f'_y dérivées partielles de f par rapport à x et y. sous réserve que $f'_y \neq 0$ au point considéré.

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE : $y = f(u, v, w)$, u, v, w étant fonctions de x.

$$y' = f'_u\, u'_x + f'_v\, v'_x + f'_w \cdot w'_x\,.$$

FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS.

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \qquad c \in\,]a,b[\,,$$

ou $$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \qquad 0 < \theta < 1\,.$$

Hypothèses : f continue pour $x \in [a, b]$, ou $[a, a+h]$;

f dérivable pour $x \in\,]a,b[$, ou $]a, a+h[$

2.1.3 Normes et distances dans $\mathbb{R}^n$

Définition. — Une application $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée *norme* si, et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1° $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, pour $x \in \mathbb{R}^n$.

2° Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $N(\lambda x) = |\lambda| . N(x)$.

3° Pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. (Inégalité triangulaire).

Remarque. — Une conséquence de cette définition est que $N(x) \geq 0$ pour tout x élément de $\mathbb{R}^n$.

Quelques normes dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

– On appelle *norme euclidienne*, la norme définie par $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

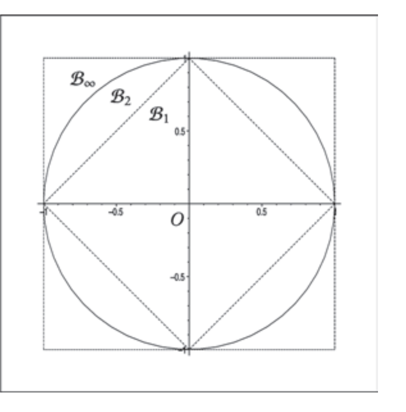
– On définit également la *norme* 1 de x par $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

– On définit la *norme infinie* de x par $\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|,\ |x_2|,\ ...,\ |x_n|\right)$.

– Plus généralement, on peut munir $\mathbb{R}^n$ de la *norme p*, pour p entier naturel non nul, définie par $\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

DÉFINITION. — La boule ouverte (resp. fermée) de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ associée à la norme N désigne l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^n$ tels que $N(x - x_0) < r$ (resp. $N(x - x_0) \leq r$). On la note $B(x_0, r)$ (resp. $B_f(x_0, r)$).

Ci-dessous, on a représenté les boules unités (de rayon 1) associées aux trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$.



DÉFINITION. — Un ensemble O est dit ouvert si pour tout élément x_0 de O, on peut trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r)$ est incluse dans O. On dit qu'un ensemble F est fermé si son complémentaire est ouvert.

2.1.4 Fonctions de plusieurs variables

Soit f, une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ noté O et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note :

$$f : x = (x_1, \ldots, x_n) \in O \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Soit $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in O$. On définit les notions de continuité et différentiabilité au voisinage de x^0.

Continuité. — f est continue en x^0 si $\lim_{x \to x^0} f(x) = f\left(x^0\right)$.

– *Existence de dérivées partielles selon* x_1. — f admet une dérivée partielle selon x_1 en x^0 si l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto f\left(x_1^0 + t, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ est dérivable en 0. Si c'est le cas, on note indifféremment $f'_{x_1}\left(x^0\right)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)$ sa dérivée partielle en x^0 selon x_1. On définit de la même façon $f'_{x_i}\left(x^0\right)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)$ pour i entier compris entre 1 et n.

– *Différentiabilité.* — On dit que f est différentiable en x^0 si, et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x^0. C'est-à-dire que pour tout $h = \left(h_1, \ldots, h_n\right)$ tel que $x^0 + h = \left(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n\right) \in O$, il existe une application linéaire $\mathrm{d}f_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une application ε définie au voisinage de $(0, \ldots, 0)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f\left(x^0 + h\right) - f\left(x^0\right) = \mathrm{d}f_{x_0}(h) + \|h\|_2\, \varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Remarque 1. Si f est différentiable en x^0, alors le terme d'ordre 1 se calcule à l'aide de la limite

$$df_{x_0}(h) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in R, t \neq 0}} \frac{f\left(x^0 + t.h\right) - f\left(x^0\right)}{t}.$$

Remarque 2. Dans l'écriture du développement limité, le choix de la norme n'a pas d'importance. Une propriété des normes en dimension finie (n ici) est qu'elles sont toutes équivalentes, ce qui implique que, si f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x^0 pour une certaine norme, elle admettra le même développement à l'ordre 1 pour toute autre norme de $\mathbb{R}^n$.
Classe C^1. — On dit que f est de classe C^1 au voisinage de x^0 si, et seulement si les applications f'_{x_1}, …, f'_{x_n} sont continues au voisinage de x^0.

Remarque. Si f est de classe C^1 au voisinage de x^0, on a $df_{x_0}(h) = f'_{x_1}\left(x^0\right)h_1 + \ldots + f'_{x_n}\left(x^0\right)h_n$. On définit le gradient de f en x^0, que l'on note $\nabla f\left(x^0\right)$ ou $\text{grad}\, f\left(x^0\right)$, par $\nabla f\left((x^0)\right) = \left(f'_{x_1}\left(x^0\right),\ \ldots, f'_{x_n}\left(x^0\right)\right)$.
Ainsi, si f est de classe C^1 au voisinage de x^0, son développement limité s'écrit :

$$f\left(x^0 + h\right) - f\left(x^0\right) = \nabla f\left(x^0\right) \cdot h + \|h\| \varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On peut faire le lien entre les différentes notions ci-avant :

$$\begin{array}{ccccc} f \text{ est } C^1 & \Rightarrow & f \text{ admet un } DL \text{ à l'ordre } 1 & \Rightarrow & f \text{ continue} \\ & & \Downarrow & & \\ & & f \text{ admet des dérivées partielles} & & \end{array}$$

2.2 Intégrales

2.2.1 Définitions

1° INTÉGRALE DE RIEMANN.

Soit f une fonction réelle, définie et *bornée* sur le segment $[a,b]$ et une subdivision de ce segment en n segments partiels tels que

$$x_o = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_p < x_{p+1} \ldots < x_n < b = x_{n+1}.$$

Si ξ_p est un nombre arbitraire du segment $[x_p, x_{p+1}]$, avec $x_p < \xi_p < x_{p+1}$, on dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si la somme :

$$\sum_{p=0}^{n} (x_{p+1} - x_p) f(\xi_p) = (x_1 - a) f(\xi_1) + \ldots$$
$$+ (x_{p+1} - x_p) f(\xi_p) + \ldots + (b - x_n) f(\xi_n)$$

tend vers une limite I quel que soit le choix des ξ_p lorsque le nombre des segments partiels augmente indéfiniment, le plus grand d'entre eux tendant vers 0.

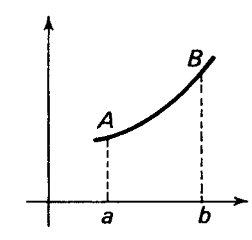
Cette limite I est l'intégrale de f et s'écrit :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2° INTÉGRALE CURVILIGNE. — Si on se donne une fonction f et une autre fonction $(x, y) \to f(x, y)$ continue par rapport aux variables x et y, on dit que $\int_a^b F(x, y)\mathrm{d}x$ est une intégrale *curviligne* le long de la courbe $C[y = f(x)]$.

On écrit :

$$\int_a^b F(x, y)\mathrm{d}x = \int_c F(x, y)\mathrm{d}x.$$



Si C est définie paramétriquement, on est amené à considérer les intégrales curvilignes du type

$$\int_c P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y,$$

qu'on ramène à une intégrale simple de la forme :

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

3° Intégrale considérée comme fonction de sa limite supérieure.

Si f est une fonction intégrable sur le segment $[a,b]$, la fonction

$$F:\ x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a pour dérivée f sur ce segment.

4° Dérivation sous le signe $\int$:

si l'application $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existe et est continue sur $[a,b]$ x I avec I intervalle de $\mathbb{R}$, on a les résultats :

a) Si les limites a et b ne dépendent pas de la variable t :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,\ t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t)\,\mathrm{d}x$$

b) Si les limites dépendent de la variable t :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,\ t)\,\mathrm{d}x = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t)\,\mathrm{d}x + b' f[b(t),\ t] - a'(t) f[a(t),\ t]\,.$$

2.2.2 Méthodes de calcul des intégrales

I. *Changement de variables.* — Soit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $x = \varphi(t)$ ou $t = \psi(x)$, $\psi(x)$ étant une fonction de x. On a $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, et

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. *Intégration par parties.*

$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u$, u et v étant des fonctions continues de x.

2.2.3 Intégrales indéfinies

■ Primitives usuelles simples

Ces primitives ne sont définies qu'à une constante quelconque près.

Fonctions :	Intégrales :
x^m	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m + 1 \neq 0)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert + C$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\text{Arc tan}\frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} \frac{1}{a}\text{Arg th}\frac{x}{a} + C & \text{si } \lvert x \rvert < a \\ \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C & \forall x \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\text{Arc sin}\frac{x}{a} + C$, ou $-\text{Arc cos}\frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - h}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + h}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + h}} \begin{cases} \text{si} & h = -a^2 \\ \text{si} & h = +a^2 \end{cases}$	$\text{Arg ch}\frac{x}{a} + C$ $\text{Arg sh}\frac{x}{a} + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

Fonctions :	Intégrales :
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{cotan}\, x + C$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\text{cotan}\, x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\tan^2 x$	$\text{tg}\, x - x + C$
$\text{ch}\, x$	$\text{sh}\, x + C$
$\text{sh}\, x$	$\text{ch}\, x + C$
$\frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$\text{th}\, x + C$
$\frac{1}{\text{sh}^2 x}$	$-\frac{1}{\text{th}\, x} + C$
$\text{sh}^2 x$	$\frac{1}{2}(-x + \text{sh} x \cdot \text{ch} x) + C$
$\text{ch}^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \text{sh} x \cdot \text{ch} x) + C$
$\text{th}\, x$	$\ln \text{ch}\, x + C$
$\frac{1}{\text{th}\, x}$	$\ln\lvert\text{sh}\, x\rvert + C$
$\frac{1}{\text{sh}\, x}$	$\ln\left\lvert\text{th}\frac{x}{2}\right\rvert + C$
$\frac{1}{\text{ch}\, x}$	$2\, \text{Arc th}\, (e^x) + C$
$\text{th}^2 x$	$x - \text{th}\, x + C$

■ Procédés de calcul des primitives de certaines fonctions

EXPRESSIONS DE LA FORME $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

P et Q étant 2 polynômes (degré P < degré Q) (s'il n'en était pas ainsi, il n'y aurait qu'à effectuer la division et le reste se présenterait sous cette forme). Décomposition en fractions rationnelles.

1° *Racines réelles de Q.*

α*) Racines simples.* — On met $\dfrac{P}{Q}$ sous la forme

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots$$

(calcul de A, B, C, ... soit en donnant à x les valeurs des racines, soit en identifiant les puissances égales de x).
Les intégrales sont de la forme A In $(x-a)$ + Constante.

β) *Racines multiples* de Q. On écrit :

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_a}{(x-a)^{\alpha}}+B_1\ldots,$$

B_1 étant éventuellement un polynôme, et on intègre terme à terme.

2° *Racines imaginaires de Q.*

α) *Racines simples :* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit

$$\frac{A_1x+B_1}{a_0x^2+b_0x+c_0}+\frac{A_2x+B_2}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\ldots$$

On met les dénominateurs sous la forme u^2+a^2, en utilisant une actorisation canonique et l'on a des intégrales de la forme

$$\int\frac{Mu\,\mathrm{d}u}{a^2+u^2} \quad \text{et} \quad \int\frac{N\mathrm{d}u}{a^2+u^2}.$$

Intégrale de la forme $I=\displaystyle\int\frac{Mu}{a^2+u^2}\mathrm{d}u$.

On pose $u^2+a^2=v$. D'où $2\,u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}v$.

$$I = \frac{M}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v} \quad \text{de la forme } \frac{M}{2}\ln v = \frac{M}{2}\ln(u^2 + a^2).$$

– Intégrale de la forme $\int \frac{N\,\mathrm{d}u}{a^2 + u^2}$. C'est un arc tan.

β) *Racines multiples.* — On est ramené à des intégrales de la forme

$$\int \frac{px + q}{(ax^2 + bx + c)^m},$$

avec $m > 1$, qui peuvent se mettre sous la forme $\int \frac{Pu + Q}{(u^2 + a^2)^m}\mathrm{d}u$.

Intégrale $I_1 = \int \frac{Pu\,\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^m}$. On pose $u^2 + a^2 = v$, $2\,u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$.

$$I_1 = \frac{P}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^m} \qquad \text{Si } m > 1, \qquad I_1 = \frac{P}{2(1-m)}\frac{1}{v^{m-1}}.$$

Intégrale $I_m = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{u^2 + a^2 - u^2}{(u^2 + a^2)^m}\mathrm{d}u$.

$$I_m = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^{m-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^m} = \frac{1}{a^2}I_{m-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^m}.$$

$\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^m}$ s'intègre par parties et donne

$$\frac{u}{2(1-m)(u^2 + a^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + a^2)^{m-1}}.$$

D'où la formule de récurrence :

$$I_m = I_{m-1}\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2(1-m)} - \frac{u}{2a^2(1-m)(u^2 + a^2)^{m-1}},$$

$$I_m = \frac{3 - 2m}{2a^2(1-m)}I_{m-1} - \frac{u}{2a^2(1-m)(u^2 + a^2)^{m-1}},$$

ou

$$\boxed{2a^2(m-1)I_m = (2m-3)I_m + \frac{u}{(u^2 + a^2)^{m-1}}.}$$

INTÉGRALES DE FRACTIONS RATIONNELLES DE LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DE L'ARC x

$$I = \int R(\sin x, \cos x, \tan x)\mathrm{d}x,$$

R étant une fraction rationnelle.

Méthode générale : on pose $\tan\frac{x}{2} = t$ et $x = 2 \text{ arc tan } t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$ · On exprime $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ en fonction de t :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

et l'on a :

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

– Si R est une fonction de $\sin^2 x \cos^2 x$, $\sin x \times \cos x$, $\tan x$, on pose : $\tan x = t$, $x = \text{arc tan } t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ ·

– $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}$,

et

$$I = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

– Si R est de la forme $\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x}$:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x}.$$

On pose $\frac{b}{a} = \tan\varphi$; $a \sin x + b \cos x = \frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$.

$$I = \frac{\cos\varphi}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{a}\cos\varphi \ln\tan\frac{x+\varphi}{2} + C.$$

INTÉGRALES DE LA FORME $I = \int \sin^m x \, \mathrm{d}x$ et $J = \int \cos^m x \, \mathrm{d}x$, m entier positif.

On exprime $\sin^m x$ et $\cos^m x$ en fonction linéaire des sinus et cosinus des ares multiples.
m = positif ou négatif, mais pair.
On pose $\tan x = t$; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.
On exprime sin et cos en fonction de t et on est amené à intégrer une fraction rationnelle de t.
m positif ou négatif, mais impair.
On pose $\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$.

$$I = \int \cos^{m-1} \cos x \, dx = \int (1-t^2)^{(m-1)/2} dt.$$

Intégrales de la forme $\int \tan^m x \, dx$. Même méthode.

INTÉGRALES DE LA FORME $I = \int R(\sin mx, \cos mx, \tan mx, \cos nx, \sin nx, \tan nx)\, dx$.

R fraction rationnelle ; m et n entiers quelconques.
On exprime rationnellement les lignes trigonométriques en fonction des lignes d'un seul arc soit le p. g. c. d. de m et n, noté p. On pose alors $px = t$; $p\,dx = dt$.

$$I = \frac{1}{p} \int R(\sin t, \cos t, \tan t) dt.$$

INTÉGRALES DE LA FORME $\int \sin mx \cos nx \, dx$ ET ANALOGUES.

On transforme les produits en sommes :

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

et on a à calculer des intégrales de la forme $\int \sin \alpha x \, dx$.

INTÉGRALES DE LA FORME $I = \int P(x, \sin mx, \cos mx, \sin nx, \cos nx)\, dx$, P étant un polynôme entier.
On peut remplacer toutes les puissances des sin et cos ou tout produit de ces lignes par une fonction linéaire de lignes d'arcs multiples. On est alors ramené à des intégrales de la forme

$$I_m = \int x^m \cos bx \, dx \qquad \text{et} \qquad J_m = \int x^m \sin bx \, dx.$$

Posons $x^m = u$ et $v' = \cos bx$, $v = \dfrac{\sin bx}{b}$.
En intégrant par parties :

$$I_m = \frac{1}{b}x^m \sin bx - \frac{m}{b}\int x^{m-1}\sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{b}x^m \sin bx - \frac{m}{b}J_{m-1}.$$

$$J_m = -\frac{1}{b}x^m \cos bx + \frac{m}{b}\int x^{m-1}\cos bx \, dx = -\frac{1}{b}x^m \cos bx + \frac{m}{b}I_{m-1}.$$

Loi de récurrence : $bJ_m - mI_{m-1} = -x^m \cos bx$.

$bI_0 = \sin bx + c$, $bJ_0 = -\cos bx + c$

$bI_1 + J_0 = x \sin bx$, $bJ_1 - I_0 = -x\cos bx$, etc.

■ Intégration de radicaux

FRACTIONS RATIONNELLES DE x ET D'UN RADICAL DU DEUXIÈME DEGRÉ :

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx.$$

Première Méthode. – On peut décomposer en 3 parties :
une fraction rationnelle ;
une somme de termes de la forme $\dfrac{x^m}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, m positif ou négatif ;
une somme de termes de la forme $\dfrac{1}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, α réel ou imaginaire

En posant $x - \alpha = t$, la troisième forme se traduit par :

$$\frac{1}{t^m\sqrt{At^2 + Bt + C}}.$$

On est donc ramené à la forme :

$$I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx \; ; \quad m, \text{ positif, négatif ou nul.}$$

On peut écrire $x^m = \frac{1}{2a}(2ax + b)x^{m-1} - \frac{b}{2a}x^{m-1}$ (on fait apparaître au numérateur la dérivée de $ax^2 + bx + c$). Intégrons par parties :

$$\int \frac{(2ax+b)x^{m-1}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x \;;$$

on a

$$2x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - 2(m-1)\int x^{m-2}\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - 2(m-1)\int \frac{x^{m-2}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= 2x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - 2(m-1)\left[a\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{\sqrt{}} + b\int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{}} + c\int \frac{x^{m-2}\mathrm{d}x}{\sqrt{}}\right]$$

$$= 2x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - 2(m-1)(aI_m + bI_{m-1} + cI_{m-2}).$$

D'où :

$$I_m = \frac{1}{a}x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{1}{a}(m-1)[aI_m + bI_{m-1} + cI_{m-2}] - \frac{b}{2a}I_{m-1},$$

et la formule de récurrence

$$2\,maI_m + (2\,m-1)\,bI_{m-1} + (2\,m-2)\,cI_{m-2} = 2\,x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c},$$

ce qui donne

$2aI_1 + bI_0 = \sqrt{ax^2+bx+c}$ pour $m = 1$;

$4aI_2 + 3bI_1 + 2cI_0 = 2x\sqrt{ax^2+bx+c},$ pour $m = 2$;

et la suite pour les exposants positifs ;

et $-bI_{-1} - 2cI_{-2} = \frac{2}{x}\sqrt{ax^2+bx+c}$ pour $m = 0$

$-2aI_{-1} - 3bI_{-2} - 4cI_{-3} = \frac{2}{x^2}\sqrt{ax^2+bx+c}$ pour $m = -1$

et la suite pour les exposants négatifs.

Il est donc nécessaire de connaître I_0 et I_{-1}.

Calcul de $I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ·

a > 0. On se ramène à

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + k}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + k}\right).$$

a < 0. On se ramène à

$$\int \frac{dz}{\sqrt{m^2 - z^2}} = \arcsin\frac{z}{m}\cdot$$

Calcul de $I_{-1} = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ · On pose $x = \frac{1}{u}$; $dx = -\frac{du}{u^2}$

$$I_{-1} = -\int \frac{du}{\sqrt{cu^2 + bu + a}}$$, de la forme précédente.

Deuxième Méthode.
$a < 0$. Racines réelles. On peut mettre $ax^2 + bx + c$ sous la forme $m^2 - z^2$.
On pose $z = m \sin\varphi$:

$$dz = m\cos\varphi\; d\varphi, \qquad \sqrt{m^2 - z^2} = m\cos\varphi.$$

On a $I = \int R_1(m\sin\varphi,\; m\cos\varphi)\cos\varphi\; d\varphi.$

$a > 0$. Racines réelles. On peut mettre $ax^2 + bx + c$ sous la forme $z^2 - m^2$.

On pose $z = \frac{m}{\sin\varphi}$; $dz = \frac{-m}{\sin^2\varphi}\cos\varphi\; d\varphi.$

On a : $I = -\int R_2\left(\frac{m}{\sin\varphi}, \frac{m\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi.$

Fraction rationnelle en $\sin\varphi\;\cos\varphi$.

a > 0. Racines de $ax^2 + bx + c$ imaginaires.

On peut mettre $ax^2 + bx + c$ sous la forme $z^2 + m^2$. Posons :

$$z = m \tan\varphi\ ; \qquad dz = m\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \qquad \sqrt{z^2 + m^2} = \frac{m}{\cos\varphi}.$$

On est ramené à

$$I = \int R_3\left(m \tan\varphi, \frac{m}{\cos\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Intégrales de la forme $\quad I = \int\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx$.

$$I = \int \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = a\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\ }} + b\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\ }} + c\int\frac{dx}{\sqrt{\ }},$$

intégrales de la forme précédente.

INTÉGRALES DE FRACTIONS RATIONNELLES DE x ET DE RADICAUX DU PREMIER DEGRÉ

$$I = \int R(x, \sqrt{ax + b})\,dx, \qquad R = \text{fraction rationnelle.}$$

On pose $ax + b = u^2$; $x = \dfrac{u^2 - b}{a}, \qquad dx = \dfrac{2u\,du}{a}$.

$$I = \frac{2}{a}\int R\left(u, \frac{u^2 - b}{a}\right)u\,du, \text{ fraction rationnelle en } u.$$

Intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})\,dx$.

On pose $ax + b = u^2$; $x = \dfrac{u^2 - b}{a}, \quad cx + d = \dfrac{1}{a}(cu^2 + ad - bc)$.

On est ramené à la forme

$$\int R\left(u, \sqrt{cu^2 + ad - bc}\,dx\right).$$

INTÉGRALES DE LA FORME.

$$\int R\left[x_1\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{p'/q'}, \ldots\right]dx\cdot$$

Soit n le p. p. c. m. de q, q', ... Les fractions deviennent $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}$.

Posons $\frac{ax+b}{cx+d} = u^n$; $x = -\frac{du^n - b}{cu^n - a}$.

$$\mathrm{d}x = -\frac{n(bc-ad)u^{n-1}}{(cu^n - a)^2}\,\mathrm{d}u,$$

et l'on a

$$I = -n(bc-ad)\int R\left(-\frac{du^n - b}{cu^n - a}, u^m, u^{m'}, \ldots\right)\frac{u^{n-1}}{(cu^n-a)^2}\,\mathrm{d}u,$$

fraction rationnelle en u.

■ Intégrales d'expressions où figurent des exponentielles

$$I = \int R(\mathrm{e}^{mx})\,\mathrm{d}x\ ; \qquad R = \text{fraction rationnelle.}$$

On pose $\mathrm{e}^{mx} = u$; $m\,\mathrm{e}^{mx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}u}{u}$

$$I = \frac{1}{m}\int R(u)\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Intégrales I comprenant $\int P(x, \mathrm{e}^{ax}, \sin mx, \cos mx, \sin nx, \cos nx, \ldots)\,\mathrm{d}x$,
P = polynôme entier.
On exprime sin x et cos x par des exponentielles.

On est ramené à des intégrales de la forme $\int x^m \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$.

Intégration par parties :

$$I_m = \int x^m\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^m\mathrm{e}^{ax} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x.$$

Formule de récurrence :

$$aI_m + mI_{m-1} = x^m\mathrm{e}^{ax},$$

$$I_0 = \mathrm{e}^{ax}, \quad aI_1 + mI_0 = x\mathrm{e}^{ax}, \quad \text{etc.}$$

■ Intégrales d'expressions dans lesquelles figurent des logarithmes

Soit $\int x^m \ln x \, dx = I_{m,1}$

Intégration par parties $\left(\ln x = u, \quad \frac{dx}{x} = du, \quad dv = x^m \, dx\right)$:

$$I_{m,1} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[\ln x - \frac{1}{m+1}\right], \quad \text{avec} \quad m \neq -1 .$$

Pour m = –1, $I_{1,-1} = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Forme $I_{m,p} = \int x^m (\ln x)^p \, dx$, m quelconque, p entier et positif.

Intégration par parties :

$$I_{m,p} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^p - \frac{p}{m+1}\int x^m (\ln)^{p-1} \, dx \ldots$$

Formule de récurrence :

$$(m+1)I_{m,p} + pI_{m,p \cdot 1} = x^{m+1}(\ln x)^p .$$

$p = 0, \quad (m+1)\, I_{m,0} = x^{m+1}$;

$p = 1, \quad (m+1)\, I_{m,1} + I_{m,0} = x^{m+1} \ln x$;

$p = 2, \quad (m+1)\, I_{m,2} + 2\, I_{m,1} = x^{m+1} (\ln x)^2$, etc.

INTÉGRALES DE POLYNÔMES ENTIERS EN x ET $\ln x$.

$$I = \int P(x, \ln x) \, dx .$$

1° On peut décomposer en termes de la forme $x^m(\ln x)^p$.

2° Posons $\ln x = t$; $x = e^t$, $dx = e^t \, dt$.

$$I = \int P(e^t, t)e^t \, dt, \qquad \text{forme précédente.}$$

■ Intégrales d'expressions comprenant des fonctions circulaires inverses

$$I_m = \int x^m \operatorname{arc\,tan} ax \, dx.$$

Intégration par parties :

$$I_m = \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{arc\,tan} ax - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^{m-1}}{1 + a^2 x^2} \, dx.$$

On est ramené à une fraction rationnelle.

$$I_m = \int x^m \operatorname{arc\,sin} ax \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{arc\,sin} ax - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{1 - a^2 x^2} \, dx.$$

Polynômes en (x, arc sin ax) :

$$I = \int P(x, \operatorname{arc\,sin} ax) \, dx.$$

On pose arc sin $ax = t$; $dx = \frac{1}{a} \cos t \, dt$.

$$I = \frac{1}{a} \int P\left(\frac{1}{a} \sin t, t\right) \cos t \, dt.$$

2.2.4 Intégrales définies

■ Méthodes de calcul des intégrales définies

Il y a de nombreuses méthodes de calcul des intégrales $\int_a^b$ dont la plus courante est, quand il est possible, le calcul d'une primitive F, c'est -à-dire telle que $F(x) = \int f(x) \, dx$, dont on tire $F(b) - F(a)$. Malheureusement ce calcul n'est pas toujours possible et quand les limites sont 0 ou ∞ , on tombe souvent sur une indétermination et l'on est obligé de chercher un autre moyen.

Autres méthodes :

Utilisation de la méthode des résidus.
Utilisation des transformations soit de Laplace, soit de Mellin.
Nous donnons ci-dessous un certain nombre d'intégrales définies parmi les plus usuelles, et nous indiquerons ensuite les principes et des exemples d'utilisation des méthodes des résidus et de Laplace.

La fonction sous le signe $\int$ est une fonction algébrique :

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, \mathrm{d}x = (b-a)^{m+n+1} \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \; ; \; m, n = 0,1,2, \ldots$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+b} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \; ; \quad a>0, \quad b>0 \; ;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi a} \; ; \quad 0<a<1. \qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{16}.$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^p)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}B\left(\frac{m}{p}, n\right)$$; B = fonction eulérienne de 1re espèce, appelée également fonction Beta.

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\mathrm{d}x}{(1+x^n)^\alpha} = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{a}{n}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$ $0<a\le 1$ Γ = fonction eulérienne de 2e espèce, appelée également fonction Gamma.

$$\text{Si } \alpha = 1, \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x^n)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi a}{n}}.$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[p]{1-x^p}} = \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{n}}, \qquad p = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n\sin\frac{2p+1}{2n}\pi} \; ;$$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\frac{\mathrm{d}x}{x+\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^p \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0<p<1 \; ;$$

α réel et extérieur à (–1, 0).

En dérivant cette dernière relation par rapport à α, on calcule les intégrales de la forme

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\frac{\mathrm{d}x}{(x+\alpha)^n}.$$

INTÉGRALES DE FONCTIONS CIRCULAIRES OU HYPERBOLIQUES.

Intégrales de Wallis

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\qquad = \frac{1.3.5\ \dots\ (2n-1)}{2.4.6\ \dots\ (2n)}\,\frac{\pi}{2}\ ;\quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\qquad = \frac{2.4.6\ \dots\ (2n)}{3.5.7\ \dots\ (2n+1)}\ ;\quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos^p x\,\mathrm{d}x = 2^{-p}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}. \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} 0 & \text{si} & m\neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} & m = n \end{Bmatrix}\ ;\ m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_{-a}^{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\cdot\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & \text{si} & m\neq n \\ a & \text{si} & m = n \end{Bmatrix}\ ;\quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_{-a}^{+a}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = 0\ ;\quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cdot\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{a-b},\quad a > b > 0\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{b\pi}{2}\ , \quad \text{à condition que } a \geq b \geq 0\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi/2 & \text{si} \quad a > b > 0, \\ \pi/4 & \text{si} \quad a = b > 0, \\ 0 & \text{si} \quad b > a \geq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(1 - 2a\cos x + a^2)}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(1-a)} & \text{pour} \quad |a| < 1\ ; \\ \dfrac{\pi}{2a(a-1)} & \text{pour} \quad |a| > 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1 - 2a\cos x + a^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{a^n \pi}{1 - a^2} & \text{pour} \quad |a| < 1\ ; \\ & n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \dfrac{\pi}{a^n(a^2 - 1)} & \text{pour} \quad |a| > 1. \end{cases}$$

$$\text{Intégrales de Fresnel} \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \cos t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(a-x) + \cos(a-x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\sin a\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax^{\alpha}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\alpha}\ ; \quad a > 0, \alpha > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan ax}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ ; \quad a > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(b^2 + x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2b^2}(1 - \mathrm{e}^{-ab})\ ; \quad b \geq 0,\ a > 0\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ab}\ ; \quad a > 0,\ b \geq 0\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \text{arc tan}\,\alpha\ ; \quad \text{si } \alpha = 0: \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha} x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \alpha > -1\,.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \pi\sqrt{2}\,.$$

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\cos x\, dx = \Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}\ ; \quad \int_0^{\infty} x^{p-1}\sin x\, dx = \Gamma(p)\sin\frac{p\pi}{2}.$$

(Si l'on fait = 1/2, on retrouve les intégrales de Fresnel).

$$\int_0^{\infty} \cos x^n\, dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}\ ; \quad \int_0^{\infty} \sin x^n\, dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n},\ n > 1\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

INTÉGRALES DÉFINIES DE FONCTIONS EXPONENTIELLES.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ; \quad a > 0\,.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2 - b^2/x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}\ ; \quad a > 0,\ b \geq 0\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)\ ; \quad a > 0,\ b > 0\,.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1}\, dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}\, dx = \frac{1.3.5\ \ldots\ (2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ; \quad a > 0,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2}\, dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \; ; \quad a > 0,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + 2bx + c)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{(b^2 - ac)/a} \; ; \quad a > 0 .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a} \; ; \quad a > 0 .$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, x \sin bx\, dx = \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-b^2/4a} \; ; \quad a > 0 .$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \; ; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} \cos ty\, dt = \int_0^{\infty} e^{-ty} \cos tx\, dt = \frac{x}{x^2 + y^2} \; ; \quad x > 0, \quad y > 0 .$$

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-bx}\, dx = \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} \; ; \quad a > -1, \quad b > 0 .$$

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-bx^2}\, dx = \frac{\Gamma\frac{(a+1)}{2}}{2b^{(a+1)/2}} \; ; \quad a > -1, \quad b > 0 .$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^a}\, dx = \frac{\Gamma(1/a)}{a} \; ; \quad a > 0 .$$

Intégrales définies de fonctions logarithmiques.

$$\int_0^{\pi} \ln(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx = -\pi \ln 2 .$$

$$\int_0^{\pi} x \ln(\sin x)\, dx = \frac{\pi^2}{2} \ln 2 .$$

$$\int_0^{\pi} \ln(1 \pm 2a \cos x + a^2)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad |a| \le 1 \\ 2\pi \ln|a| & \text{pour} \quad |a| > 1 \end{cases} .$$

$$\int_0^\infty x^a e^{-bx} \ln x \, dx = \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}}[\psi(a+1) - \ln b] \; ; \quad a > -1, \; b > 0 \, .$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = 1 - C = \psi(1) \; ; \quad C = \text{constante d'Euler} \simeq 0{,}577\,215\,665.$$

$\psi(x)$: voir fonctions eulériennes.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} \, dx = -\frac{1}{2} \, ,$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{4} \, .$$

INTÉGRALES DÉFINIES DE FONCTIONS DE BESSEL.

$$\int_0^\infty J_\alpha(ax) \, dx = \frac{1}{a} \, .$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\alpha(ax)}{x} \, dx = \frac{1}{\alpha} \, .$$

$$\int_0^\infty e^{-bx} J_\alpha(ax) \, dx = \frac{a^\alpha}{\sqrt{b^2 + a^2}(b + \sqrt{b^2 + a^2})^\alpha} \, .$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} J_\alpha(ax)}{x} \, dx = \frac{a^\alpha}{\alpha(b + \sqrt{b^2 + a^2})^\alpha} \, .$$

$$\int_0^\infty J_\alpha(tx) \cdot x^\alpha \, dx = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi} \, t^{a+1}} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) .$$

$$\int_0^\infty J_\alpha(tx) e^{-x^2 y} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{4y}} e^{-t^2/8y} I_{\alpha/2}\left(\frac{t^2}{8y}\right) .$$

$$\int_0^\infty N_a(tx) e^{\beta - 1} \, dx = -\frac{2^{\beta - 1}}{\pi t^\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \cos\left[(\beta - \alpha)\frac{\pi}{2}\right] ,$$

avec $t > 0$, $\beta < 1/2$, $\beta \pm \alpha > 0$.

■ Calcul des intégrales définies au moyen de la transformation de Laplace

Soit F image de $f(t)$ ou de $h(t)$.

Intégrales de la forme $\int_0^\infty h(t)\,\mathrm{d}t$.

On utilise la relation $\int_0^\infty h(t)\,\mathrm{d}t = |F(p)|_\infty^0$.

Intégrales de la forme $\int_0^\infty \frac{h(t)}{t}$. On a $\int_0^\infty \frac{h(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty F(p)\,\mathrm{d}p$.

Exemple : $\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,\mathrm{d}p = \left|\operatorname{arc\,tan}\frac{p}{\omega}\right|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

Intégrales de la forme $t^n h(t)$. – On a $\int_0^\infty t^n h(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\left|\frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n}\right|_0^\infty$.

Exemple : $\int_0^\infty t^3 \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = (-1)^4\left|\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}p^3}\left(\frac{1}{p+\alpha}\right)\right|_0^\infty = \frac{3\,!}{\alpha^4}$.

Intégrales de la forme $\mathrm{e}^{-\alpha t}h(t)$.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}h(t)\,\mathrm{d}t = |F(p+\alpha)|_\infty^0.$$

Exemple : $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}J_n(t)\,\mathrm{d}t$, n quelconque.

$$|F(p+\alpha)|_\infty^0 = \left|\frac{[\sqrt{(p+\alpha)^2+1}-(p+\alpha)]^n}{\sqrt{(p+\alpha)^2+1}}\right|_\infty^0 = \frac{(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha)^n}{\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

Si l'on fait $\alpha = 0$, on retrouve $\int_0^\infty J_n(t) = 1$, quel que soit n.

■ Calcul des intégrales définies au moyen de la transformation de Mellin

(Voir définition de la transformation de Mellin, p. 180.)

■ Calcul des intégrales définies par la méthode des résidus

RAPPEL DE NOTIONS RELATIVES AUX FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

Une fonction complexe $F = f(z)$ peut se mettre sous la forme $F = P(x, y) + iQ(x, y)$. Pour que F soit holomorphe sur Ω, un ouvert de l'ensemble des complexes, c'est-à-dire dérivable en tout point de Ω à dérivée continue, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(Conditions de Cauchy) $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad$ et $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -\dfrac{\partial P}{\partial x}$,

ce qui implique

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0\,.$$

De même pour P. Dans ce cas, on dit que la fonction F est *analytique*.
Fonction continue. — Même définition que pour les fonctions de variable réelle.
Fonction uniforme, qui n'a qu'une seule détermination pour une valeur de z.

THÉORÈME DE CAUCHY. — L'intégrale $\int_c f(z)\,\mathrm{d}z$ prise le long d'un contour C à l'intérieur duquel f est holomorphe, est identiquement nulle.

Formule de Cauchy. x étant un point intérieur d'un contour C fermé dans lequel f est holomorphe, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_c \frac{f(z)}{(z-x)}\mathrm{d}z\,.$$

En dérivant n fois par rapport à x, on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} n\,! \int_c \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z\,.$$

Formules de Taylor et de Mac-Laurin. — Mêmes formules que pour les fonctions de variables réelles dans tout disque de centre a à condition que la fonction soit holomorphe dans ce disque et sur sa frontière.

THÉORÈME ET SÉRIE DE LAURENT :

Une fonction f holomorphe dans une couronne circulaire privée de sa frontière et de son centre, est à l'intérieur de cette couronne développable en série de puissances positives et négatives de $(z - a)$.

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(z-a)^n} + \ldots$$

Points singuliers.

Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω du plan complexe limité par une courbe simple Γ, sauf éventuellement en un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_N$. Ces points sont appelés *points singuliers*. On distingue différents types de points singuliers :

– *Point singulier artificiel :* tel que f se prolonge par continuité en ce point.

– *Pôle :* c'est un point singulier z_0 pour lequel le développement de f en série de Laurent est du type :

$$\frac{c_{-N}}{(z-z_0)^N}+\frac{c_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}}+\ldots+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots,$$

avec N entier fini non nul et $c_{-N}\neq 0$.

– *Point singulier essentiel :* ce sont les autres points. En particulier, leur développement en série de Laurent possède un nombre infini de termes d'indices négatifs.

On appelle résidu de la fonction, au point a, le terme B_1, coefficient de $\dfrac{1}{z-a}$ du développement en série de Laurent.

Théorème des résidus. — a étant un pôle ou un point essentiel l'intégrale

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z$$

prise le long d'un cercle très petit entourant a est égale à $2\mathrm{i}\pi B_1$, soit

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi B_1 .$$

S'il y a plusieurs pôles

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi(B_1+B_2+\ldots+B_n),\quad B_1, B_2, \ldots, B_n$$

étant ici les résidus afférents aux différents pôles.

CALCUL DES RÉSIDUS :

a) *Pôle simple* : α) si $f(z)$ peut se mettre sous la forme $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)h(z)}$, on a $B_1=\dfrac{g(a)}{h(a)}$.

β) Si on ne peut pas mettre $f(z)$ sous la forme précédente, on écrit $f(z) = \frac{g(z)}{l(z)}$, $l(z)$ ayant a comme racine simple : $B_1 = \frac{g(a)}{l'(a)}$ (règle de l'Hospital appliquée à $\frac{(z-a)g(z)}{l(z)}$).

b) *Pôle multiple* : $f(z) = \frac{g(z)}{l(z)}$.

$$(n-1)!\,B_1 = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[\frac{g(z)(z-a)^n}{l(z)}\right]_{\text{pour } z=a}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]_{\text{pour } z=a}.$$

Donc l'intégrale $\int_c f(z)\,\mathrm{d}z$ à l'intérieur du domaine délimité par la courbe C est égale à $2i\pi(B_1 + \ldots + B_n)$ si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans ce domaine sauf bien entendu aux pôles ou points essentiels dont les résidus sont $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Si la fonction est multiforme, on détermine une zone fermée en entourant les points de ramification de petits cercles que l'on raccorde à la zone générale par des *lacets* et on intègre le long de la courbe ainsi formée qui délimite un domaine dans lequel la fonction est holomorphe.

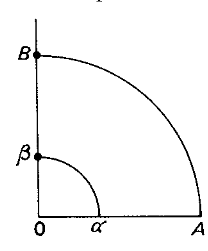
Cette intégration est facilitée par les 2 théorèmes suivants :

Théorème A. — Soit f une fonction continue dans le voisinage du point a, sauf au point a lui-même et telle que $|(z-a)f(z)|$ tende vers 0 avec $|z-a|$. L'intégrale $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ prise le long d'une circonférence γ de centre a et de rayon ρ, tend vers 0 avec ρ.

Théorème B. — Soit f une fonction continue à l'extérieur d'un cercle T de centre a et telle que $|(z-a)f(z)| \to 0$ quand $|z-a|$ croît indéfiniment. L'intégrale $f(z)\,\mathrm{d}z$ prise le long d'une circonférence C de centre a et de rayon R, $\to 0$ avec $1/R$, c'est-à-dire quand $R \to \infty$.

Exemples de calcul dune intégrale définie par la méthode des résidus.

I. *Fonction uniforme.* Soit $f(z) = z^{p-1}e^{-z}$, p constante réelle telle que $0 < p < 1$; $f(z)$ holomorphe dans le domaine $\alpha AB\beta(C)$. Intégrons le long de la courbe C.



1° Segment αA :

$$\int_{\alpha A} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^x x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \Gamma(p)\,.$$

2° Cercle AB :

$$\int_{AB} z^{p-1}\mathrm{e}^{-z}\ \mathrm{d}z\,.$$

L'imaginaire sous le signe $\int$ a pour module $R^{p-1}\mathrm{e}^{-R\cos\theta}$ quand z parcourt le quart de cercle AB. II est facile de voir que cette expression $\to 0$ quand $R \to \infty$. L'intégrale tend donc vers 0.

3° Intégrale $B\beta$; $z = p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

$$z^{p-1} = \rho^{p-1}\mathrm{e}^{(p-1)\mathrm{i}\theta} = \rho^{p-1}\left[\cos(p-1)\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin(p-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \rho^{p-1}\left(\sin\frac{p\pi}{2} - \mathrm{i}\ \cos\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{e}^{-z} = \exp\left[-\rho\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{2}\right)\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho} = \cos\rho - \mathrm{i}\ \sin\rho\,,$$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\ \mathrm{d}\rho\,.$$

L'intégrale est donc le long de $B\beta$:

$$\int_{B\beta} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{B\beta} \rho^{p-1}\left(\sin\frac{p\pi}{2} - \mathrm{i}\ \cos\frac{p\pi}{2}\right)(\cos\rho - \mathrm{i}\ \sin\rho)\mathrm{i}\ \mathrm{d}\rho$$

$$= \left(\cos\frac{p\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin\frac{p\pi}{2}\right)\int_R^r \rho^{p-1}(\cos\rho - \mathrm{i}\ \sin\rho)\mathrm{d}\rho\,.$$

À la limite : $\int_{B\beta} = -\left(\cos\frac{p\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin\frac{p\pi}{2}\right)\int_0^\infty \rho^{p-1}(\cos\rho - \mathrm{i}\ \sin\rho)\mathrm{d}\rho$.

4° Intégrale le long de $\beta\alpha$.

$$|zf(z)| = r^p \mathrm{e}^{-r\cos\theta} \to 0 \quad \text{quand} \quad r \to 0\,.$$

Posons

$$U(p) = \int_0^\infty \rho^{p-1}\cos\rho\ \mathrm{d}\rho \quad \text{et} \quad V(p) = \int_0^\infty \rho^{p-1}\sin\rho\ \mathrm{d}\rho\,.$$

On a donc (théorème de Cauchy) :

$$\Gamma(p) = \left(\cos\frac{p\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin\frac{p\pi}{2}\right)(U - \mathrm{i}\ V)\,.$$

En développant :

$$\Gamma(p) = U\cos\frac{p\pi}{2} + U\mathrm{i}\ \sin\frac{p\pi}{2} - \mathrm{i}\ V\cos\frac{p\pi}{2} + V\ \sin\frac{p\pi}{2}\,,$$

ce qui donne 2 équations :

$$\begin{cases} U\ \cos\frac{p\pi}{2} + V\sin\frac{p\pi}{2} = \Gamma(p), \\ U\ \sin\frac{p\pi}{2} - V\ \cos\frac{p\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

D'où $U = \Gamma(p)\ \cos\frac{p\pi}{2}$ et $V = \Gamma(p)\ \sin\frac{p\pi}{2}$ ce qui donne les 2 intégrales :

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos x\ \mathrm{d}x = \Gamma(p)\ \cos\frac{p\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin x\ \mathrm{d}x = \Gamma(p)\ \sin\frac{p\pi}{2}\,.$$

Si l'on fait $p = 1/2$, on retrouve les intégrales de Fresnel. On en tire également :

$$I_n = \int_0^\infty \cos x^n\,\mathrm{d}x\,.$$

Posons $x^n = t\,;\ x = t^{1/n}$ et $\mathrm{d}x = \frac{1}{n}t^{(1/n)-1}$.

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty t^{(1/n)-1}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}U\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}, \quad n > 1\,.$$

$$\int_0^\infty \sin x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}\,.$$

II. *Fonction multiforme.*

Soit : $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}\, dx$.

Posons $f(z) = \frac{\sqrt{z(z-1)}}{z+1}$, fonction multiforme ayant des points de branchement pour $z = 0$ et $z = 1$ et un pôle simple pour $z = -1$.

Soit $z = \rho\, e^{i\theta}$ et $z - 1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}$.

Si C est un cercle de centre O et de rayon $R > 1$, $f(z)$ est uniforme dans le domaine compris entre C et le lacet (0, 1) avec un pôle simple en $z = -1$.

$$f(z) = \frac{\sqrt{\rho\rho_1}\, e^{i(\theta+\theta_1)/2}}{1+z}.$$

Soit R_{-1} le résidu au point – 1.
Les intégrales prises le long des petits cercles 0 et 1 sont nulles. On a donc

$$\int_C f(z)\, dz - \int_{m'n'} - \int_{nm} = 2i\pi R_{-1}.$$

Calculons ces diverses intégrales

1° Le long de $m'n'$: $\rho = x$, $\rho_1 = 1 - x$, $\theta = 0$, $\theta_1 = -\pi$,

$$f(z) = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}\, e^{-i\pi/2} = -i\, \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}.$$

Donc : $\int_{m'n'} f(z)\, dz = -iI$.

2° Le long de nm : $\rho = x$, $\rho_1 = 1 - x$, $\theta = 0$, $\theta_1 = \pi$.

$$f(z) = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}\, e^{i\pi/2} = \frac{i\sqrt{x(1-x)}}{1+x}$$

$$\int_{nm} f(z)\, dz = i\int_1^0 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}\, dx = -i\int_0^1 = iI.$$

3° Le long de C de rayon R.

$$f(z) = \frac{z}{z+1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{1/2}.$$

Développons en série si $|z| > 1$:

$$\frac{z}{1+z} = 1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\ldots ; \quad \left(1-\frac{1}{z}\right)^{1/2} = \pm\left(1-\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}-\ldots\right);$$

$$f(z) = \pm\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\ldots\right)\left(1-\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}\ \ldots\right).$$

Pour déterminer le signe, cherchons la valeur de l'intégrale au point A : $\rho = R, \rho_1 = R-1$; $\theta = 0, \theta_1 = 0$.

$$f(z) = \frac{\sqrt{R(R-1)}}{1+R} \to 1 \quad \text{quand} \quad R \to \infty.$$

Donc signe +.

$$f(z) = 1-\frac{3}{2z}+\theta\left(\frac{1}{z^n}\right),\ n = 2, 3, \ldots$$

Intégrons le long de C :

$$\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = \int_c \mathrm{d}z - \frac{3}{2}\int_c \frac{\mathrm{d}z}{z} + A\int_c \frac{\mathrm{d}z}{z^2} + \ldots$$

1° $$\int_c \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \rho\ \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|_0^{2\pi} = \rho(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}-1) = 0.$$

2° $$\int_c \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\,\rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\mathrm{i}\,\pi$$

3° $$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\,\rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{\rho^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \to 0 \quad \text{quand} \quad \rho \to \infty.$$

donc $\int_c f(z)\,\mathrm{d}z = -3\,i\pi$.

Il en résulte : $-3\,\mathrm{i}\pi + 2\,\mathrm{i}I = 2\,\mathrm{i}\pi R_{-1}$.

Calculons R_{-1} . C est, pour z = – 1, la valeur de $\sqrt{z(z-1)}$.

$$\rho = -1, \quad \theta = -\pi, \quad \theta_1 = -\pi .$$

Donc $R_{-1} = \sqrt{(-1)(-2)}e^{-i\pi} = -\sqrt{2}$.

en définitive : $-3\pi + 2I = -2\pi\sqrt{2}$;

$$2I = 3\pi - 2\pi\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad I = \frac{\pi}{2}(3-2\sqrt{2}) .$$

Nous donnons ci-dessous, à titre de contrôle et de comparaison, le calcul direct de l'intgrale $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+1}\,dx$:

$$\frac{\sqrt{x(1-x)}}{x+1} = \frac{x(1-x)}{(x+1)\sqrt{x(1-x)}} = \left(2-x-\frac{2}{x+1}\right)\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} ;$$

$$I = 2B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) - 2\int_0^1 \frac{x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}}{x+1}\,dx .$$

(B, intégrale eulérienne de première espèce) .

Calcul de $I_1 = \int_0^1 \frac{x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}}{x+1}\,dx$.

L'intégrale $J = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\frac{dx}{x+\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^p \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$.

Faisons $\alpha = 1$, $p = 1/2$.

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

Donc :

$$I = 2B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) - \frac{2\pi}{\sqrt{2}} .$$

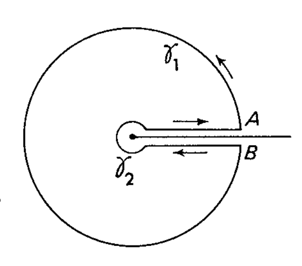
$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} - \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

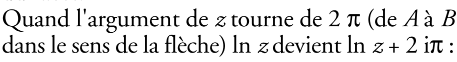
$$= 2\pi - \frac{1}{2}\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{2} - \pi\sqrt{2} = \frac{\pi}{2}(3-2\sqrt{2}) .$$

III. Fonctions comportant un logarithme sous le signe $\int$.

Cas des intégrales de la forme $\int_0^\infty F(x)\ln n \, dx$, où F est une fonction rationnelle sans pôle sur le demi-axe réel $(0, \infty)$.

Considérons la fonction $F(z)$ $(\ln z)^2$ et intégrons le long d'un cercle de centre O avec un lacet le long de l'axe des x et entourant l'origine. Les intégrales le long des courbes y_1 et $y_2 \to 0$. Restent donc les intégrales le long du lacet.




Quand l'argument de z tourne de 2π (de A à B dans le sens de la flèche) $\ln z$ devient $\ln z + 2i\pi$:

$(\ln e^{i\theta + 2i\pi} = \ln e^{i\theta} + \ln e^{2i\pi} = \ln z + 2i\pi)$.

L'intégrale le long du lacet donne :

$$\int_0^\infty F(x)(\ln x)^2 \, dx - \int_0^\infty F(x)(\ln x + 2i\pi)^2 \, dx$$

$$= 2i\pi \sum \text{Résidus de } F(z)(\ln z)^2 .$$

$$\int_0^\infty F(\ln x)^2 - \int_0^\infty F[F(\ln x)^2 + (2i\pi)^2 + 4i\pi \ \ln x] \, dx = 2i\pi \sum \text{Résidus.}$$

$$-(2i\pi)^2 \int_0^\infty F \, dx - 4i\pi \int_0^\infty F \ \ln x \, dx = 2i\pi \sum \text{ Résidus.}$$

$$i\pi \int_0^\infty F(x) \, dx = \int_0^\infty F \ \ln x \, dx = -\frac{1}{2} \sum \text{ Résidus } F(z)(\ln z)^2.$$

Si F est une fonction réelle de la variable x, $\int_0^\infty F(x) \, dx$ et $\int_0^\infty F(x) \ln x \, dx$ sont des fonctions réelles et l'on a :

$$\int_0^\infty F(x) \ln x \, dx = \text{ Partie réelle de } \left[-\frac{1}{2} \sum \text{ résidus de } F(z)(\ln z)^2\right]$$

$$\int_0^\infty F(x) \, dx = \text{ Partie imaginaire de } \left[-\frac{1}{2\pi} \sum \text{ résidus de } F(z)(\ln z)^2\right].$$

Exemple : Calculer $\int_0^\infty \frac{\ln x\, \mathrm{d}x}{(1+x)^3}$.

Le pôle de $\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}$ est z = –1.

Posons $1 + z = t$; $z = t - 1$.

La fonction devient $\frac{[\ln(t-1)]^2}{t^3}$. Le résidu au point – 1 est le coefficient de t^2 dans le développement de $[\text{In}\ (t-1)]^2$.

$$\ln(t-1) = \ln[-1(1-t)] = \ln(-1) + \ln(1-t)$$

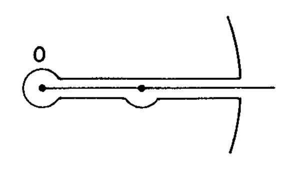
$$= \mathrm{i}\pi + \ln(1-t) = \mathrm{i}\pi - t - \frac{t^2}{2}.$$

$$[\ln(t-1)]^2 = \left[\mathrm{i}\pi - t - \frac{t^2}{2} - \ldots\right]^2.$$

Le coefficient de t^2 est $1 - \mathrm{i}\pi$ dont la partie réelle est 1.
Donc :

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\, \mathrm{d}x}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2}.$$

Cas où la fonction $F(x)$ a un pôle au point $x = 1$.



Dans ce cas, le circuit d'intégration a la forme ci-contre et présente en plus du lacet $0\ \infty$, une petite demi-circonférence au point $x = 1$.
On démontre que dans ce cas on a

$$\int_0^\infty F(x) \ln x\, \mathrm{d}x$$

$$= \pi^2 \mathrm{Re}[\text{Résidu } F]_{x=1} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\sum \text{Résidu } f\right]$$

f étant la fonction $F(z)\ (\text{In } z)^2$ où la sommation est étendue à tous les pôles de F autres que 1 et où Re signifie partie réelle.

Exemple : $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$.

Résidu de $\frac{1}{x^2 - 1}$ au point $x = 1 = \frac{1}{x+1}$: pour $x = 1, = \frac{1}{2}$.

Résidu de $\frac{(\ln z)^2}{z - 1}$ pour $z = -1$.

Dénominateur = – 2.

Numérateur (ln – 1) = iπ(ln – 1)^2 = – π^2.

$$\text{Résidu} = \frac{-\pi^2}{-2} = \frac{\pi^2}{2}\ ; \qquad -\frac{1}{2}\mathrm{Re} = -\frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_0^{v\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$$

■ Intégrales elliptiques

Ce sont des intégrales de la forme $\int_a^b \sqrt{P(x)}\,\mathrm{d}x$, dans lesquelles P est un polynôme du quatrième degré au plus.

Elles se ramènent toutes à 3 types :

Intégrale de première espèce

$$I_0 = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \quad \text{avec} \quad 0 < k < 1\ ;$$

et, en posant $t = \sin\theta$:

$$I_0 = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}.$$

Intégrale de deuxième espèce :

$$I_1 = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Intégrale de troisième espèce :

$$I_2 = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+n^2\sin^2\theta)\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}.$$

2.2.5 Calcul approché des intégrales définies

On cherche à calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de façon approchée, f étant régulière sur $[a,b]$. On appelle M_i le maximum sur $[a,b]$ de $f^{(i)}$ la dérivée $i^{\text{ème}}$ de f. On choisit une subdivision $x_0 = a$, x_1, $\cdots$, $x_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$.

A) *Méthode des rectangles.* — Elle consiste à approcher la fonction f par une constante ζ_i sur tout intervalle (x_{i-1},x_i). Cette constante peut être $\zeta_i = f(x_{i-1})$ (méthode des rectangles à gauche), $\zeta_i = f(x_i)$ (méthode à droite) ou $\zeta_i = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ (méthode du point milieu). La formule de quadrature composée s'écrit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (x_1-x_0)\zeta_1 + (x_2-x_1)\zeta_2 + \ldots + (x_n-x_{n-1})\zeta_n + R.$$

Dans le cas où le pas $x_i - x_{i-1}$ est choisi constant égal à h, on sait que :

– $|R| \le M_1(b-a)h/2$ pour la méthode des rectangles à gauche et à droite.

– $|R| \le M_2(b-a)h^2/24$, pour la méthode du point milieu.

B) *Méthode des trapèzes.* — Elle consiste à approximer la courbe de f par des morceaux de droites sur tout intervalle (x_{i-1},x_i). On pose $h_i = x_i - x_{i-1}$, le pas variable *a priori*. La formule dans le cas général est :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(h_1 f(x_0) + h_n f(x_n)) + \frac{h_1+h_2}{2}f(x_1) + \ldots$$

$$+ \frac{h_{n-1}+h_n}{2}f(x_{n-1}) + R,$$

et $|R| \le M_2(b-a)h^2/12$ dans le cas où le pas est constant égal à h.

C) *Méthode de Simpson.* — On approxime sur (x_{i-1}, x_i) la courbe de f par des morceaux de paraboles d'axes parallèles à (Oy), ayant mêmes ordonnées aux points d'abscisses x_{i-1}, $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ et x_i. On obtient donc :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)\right).$$

Dans le cas où le pas est constant égal à h, cette formule devient :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{6}[f(x_0) + f(x_n) + 2f(x_1) + \ldots + f(x_{i-1})$$

$$+ \left[4\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\right) + R,$$

avec $|R| \leq M_4 h^4 (b-a)/2880$.

Méthode du trapèze corrigée. — On approxime sur (x_{i-1}, x_i) la fonction f par un polynôme P_i de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, $P_i'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})$, $P_i(x_i) = f(x_i)$ et $P_i'(x_i) = f'(x_i)$. On obtient dans le cas d'un pas constant h :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_0 + f(x_n))\right)$$

$$+ \frac{h^2}{12} + (f'(a) - f'(b)) + R,$$

avec $|R| \leq M_4 h^4 (b-a)/720$.

Méthodes de Gauss. — L'idée consiste à remplacer, comme pour les méthodes des rectangles, des trapèzes et de Simpson, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par une expression de la forme $A_0 f(x_0) + \ldots + A_n f(x_n)$ où les coefficients A_i sont indépendants de f et les x_i, n points de $[a, b]$, tous choisis de telle sorte que l'on obtienne des formules d'intégration exactes pour des polynômes de

degré inférieur ou égal à $2n+1$. De plus, ces méthodes permettent de calculer des intégrales où la fonction f devient infinie en certains points, par exemple $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$. C'est pourquoi on va plus généralement considérer le calcul d'intégrales du type $\int_a^b f(x)w(x)\,dx$, où w est une fonction poids qui, dans la pratique, contiendra la singularité.
Ces méthodes utilisent des familles de polynômes présentées dans le chapitre « Fonctions diverses » : les polynômes de Legendre ou les polynômes de Tchebycheff. Pour cette raison, il sera, dans la pratique, intéressant de toujours nous ramener à l'intervalle d'intégration $(-1,1)$, à l'aide du changement de variable :

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t.$$

Ainsi, $\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(x(t))w(x(t))\,dt$.

Principe de la méthode : une fois les n points $x_0, \dots, x_n$ choisis, on écrit :

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)\,dx \simeq A_0 f(x_0)w(x_0) + A_n f(x_n)w(x_n),$$

avec $A_i = \int_{-1}^1 l_i(x)w(x)\,dx$ et où $l_i(x)$ désigne le produit des termes $\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, lorsque j parcourt tous les entiers entre 0 et n, excepté i.

En ce qui concerne le choix des points, on peut faire appel à l'une ou l'autre des règles suivantes :

– *Méthode de Legendre-Gauss :* dans ce cas, $w(x)=1$ sur $[-1,1]$. Les x_i sont les zéros des polynômes de Legendre. Le tableau ci-dessous donne les valeurs numériques des poids A_i jusqu'à $N=4$. La quatrième colonne fournit une majoration de l'erreur commise dans l'approximation.

N	Racines x_i	Poids A_i	Erreur
1	±0.5773502691	1	$M_4/135$
2	0	0.8888888888	$M_6/15750$
	±0.7745966692	0.5555555555	
3	±0.3399810435	0.6521451548	$M_8/3472875$
	±0.8611363115	0.3478548451	
4	0	0.5688888888	$M_{10}/1237732650$
	±0.5384693101	0.4786286704	
	±0.9061798459	0.2369268850	

– *Méthode de Gauss-Tchebycheff :* dans ce cas, $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $(-1,1)$. Les x_i sont les zéros des polynômes de Tchebycheff $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$, pour $i=0,\ldots,n$, et tous les coefficients A_i sont égaux et valent $\frac{\pi}{n+1}$.

Il existe d'autres choix de poids w et de points x_i, obtenus de la même façon que précédemment, à l'aide des polynômes de Laguerre ou Hermite par exemple.

2.2.6 Intégrales doubles et triples

INTÉGRALES DOUBLES.

Définition. — Analogue à celle des intégrales simples.
Soit (D) un domaine plan borné, quarrable et une fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ bornée dans ce domaine. Subdivisons D en n domaines partiels quarrables D_i ; soit ω_i l'aire de D_i et M_i, m_i les bornes supérieure et inférieure de $f(x, y)$ dans D_i.
À chaque subdivision correspondent les sommes :

$$S_n = \sum_1^n \omega_i M_i \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_1^n \omega_i m_i .$$

Les sommes S_n ont une borne inférieure I, les sommes s_n une borne supérieure I'. On dit que $f\, f \mapsto$ est intégrable dans (D) si $I = I'$ lorsque le nombre des domaines partiels croît indéfiniment de façon que chacun d'eux tende vers 0 dans'toutes ses dimensions. On écrit :

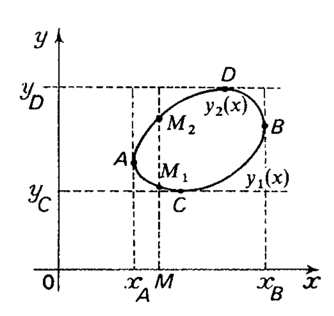
$$I = \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y .$$

Calcul des intégrales doubles.

Dans le cas où la courbe entourant le domaine est rencontrée en 2 points seulement par toute parallèle à Ox, et à Oy, on a :

$$I = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y,$$

$$I = \int_{y_C}^{y_D} \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x.$$



Si le domaine a une forme plus compliquée, on le partage en domaines partiels de façon que la condition énoncée ci-dessus soit remplie.
Dans le cas où $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ et que le domaine est un rectangle de côtés parallèles aux axes, on a

$$\iint_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x)\, \mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)\, \mathrm{d}y .$$

Intégrales triples.

Définition. — Analogue à celle des intégrales doubles.

$$I = \iiint_\omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z .$$

On a

$$I = \iiint_{\sigma_{xoy}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}z$$

$$= \int_{z_A}^{z_B} \mathrm{d}z \iint_{\sigma_z} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

σ_{xoy} est le contour apparent du domaine ω sur xoy ; z_A et z_B sont les cotes extrêmes du domaine ; σ_z est l'aire découpée par le plan de cote z.

CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LES INTÉGRALES MULTIPLES.

Si on a $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$, on a :

$$\iiint_{\omega} F\,(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\omega'} F\,[f\,(u, v, w), g(u, v, w), g(u, v, w)] \times \left|\frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\,.$$

$$\frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)} = J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix}$$

étant le *déterminant fonctionnel ou jacobien* de la transformation, et ω' le domaine correspondant à ω dans l'espace des u, v, w, à condition que les fonctions f, g, h admettent des dérivées partielles continues sur ω' ; c'est-à-dire soient de classe C^1, que, en notant $F = (f, g, h)$, $F : \omega' \mapsto \omega$ soit objective et que son application réciproque F^{-1} soit elle aussi de classe C^1 sur ω.

2.3 Équations différentielles

Définition. — Relation entre une variable x, une fonction y de x et ses dérivées

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \ldots,$$

soit :

$$f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \ldots\right) = 0\,.$$

Ordre. — Elle est d'ordre n si n est l'ordre maximal des dérivées qu'elle renferme.

Théorème général sur les équations linéaires d'ordre quelconque.

Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}p_1(x) + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) .$$

c'est-à-dire dans laquelle les différentes dérivées de y figurent au premier degré et ne se multiplient pas entre elles. q est le second nombre de cette équation.

Le théorème général est le suivant :

1° *Équations sans second membre* (c'est-à-dire dans laquelle $q = 0$). On dit dans ce cas que l'équation différentielle est homogène. – Si l'on connaît n solutions particulières indépendantes y_0, y_1, ..., y_n de l'équation sans second membre, la solution générale de cette équation est

$$y = C_0\, y_0 + C_1\, y_1 + \ldots + C_n\, y_n\,;$$

C_1, C_2, ..., C_n étant des constantes arbitraires quelconques.

2° *Équations avec second membre.* – Si l'on connaît une solution particulière y' de l'équation avec second membre, la solution générale de cette équation avec second membre est $Y = y + y'$ y étant la solution générale de l'équation sans second membre.

Notons qu'il est toujours possible de ramener toute équation différentielle à une équation différentielle du premier ordre. En effet, posons : $Y = [y, y', \ldots, y^{n-1}]'$. Alors, l'équation différentielle linéaire précédente avec second membre se réécrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y = A(x)Y + P(x)$, avec

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ p_n(x) & \cdots & \cdots & p_1(x) \end{pmatrix} \text{ et } P(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}.$$

2.3.1 Équations différentielles du premier ordre

A) *Équations dont les variables se séparent* :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad \text{avec} \quad f(x) = \varphi(x)\psi(y),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)} \quad \text{et} \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)} + C.$$

B) *Équations homogènes* ; de la forme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

On pose $y = ux$. D'où $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ soit $u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u)$.

Les variables se séparent et :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} + C.$$

Equations de la forme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$.

On pose $x = X + \alpha$ et $y = Y + \beta$, et on détermine α et β de façon que les termes constants du numérateur et du dénominateur soient nuls. On est alors ramené à :

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right), \quad \text{équation homogène.}$$

Il faut $ab' - ba' \neq 0$.

Si $ab' - ba' = 0$, on pose $\dfrac{a}{a'} = \lambda = \dfrac{b}{b'}$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left[\frac{\lambda(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}\right].$$

On pose $a'x + b'y = z$

$$a'\mathrm{d}x + b'\mathrm{d}y = \mathrm{d}z,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a' = b'f\left(\frac{\lambda z + c}{z + c'}\right);$$

équation à variables qui se séparent.

C) *Équations linéaires du premier ordre* : équations du premier degré par rapport à y et $\frac{dy}{dx}$. Forme $\frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x)$.

1° Équation sans second membre : $\frac{dy}{dx} + yf(x) = 0$.

Elle est à variables séparées : $\frac{y'}{y} = -f(x)$.

$$\ln y = -F(x) + C, \qquad y = C\,e^{-F(x)}.$$

2° Équations avec second membre :

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x).$$

On commence à résoudre l'équation sans second membre :

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = 0, \quad \text{soit} \quad y = C\,e^{-F(x)}$$

et on considère C comme une fonction de x (méthode de la variation des constantes) :

$$\frac{dy}{dx} = -C\,e^{-F(x)} f(x) + \frac{dC}{dx}\,e^{-F(x)}.$$

Portons dans l'équation

$$\frac{dC}{dx}\,e^{-F(x)} = \varphi(x).$$

Les variables se séparent :

$$C = \int e^{F(x)}\varphi(x)\,dx \quad \text{et} \quad y = e^{-F(x)} \cdot \int e^{F(x)}\varphi(x)\,dx + C.$$

D) *Équationss se ramenant aux équations linéaires du premier ordre.*

1° Équation de Bernoulli. De la forme $\frac{dy}{dx} + yf(x) = y^n\varphi(x)$.

On se ramène à une équation linéaire :

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}}f(x) = \varphi(x).$$

On pose $\frac{1}{y^{n-1}} = z$.

$$dz = -\frac{n-1}{y^n}dy \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx} + zf(x) = \varphi(x)$$

équation linéaire.

2° Équation de Lagrange : $y = xf(y') + \varphi(y')$.

On pose $y' = p = \frac{dy}{dx}$, d'où $y = xf(p) + \varphi(p)$. (1)

Différentions :

$$dy = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp$$

$$= f(p)dx + dp[xf'(p) + \varphi'(p)] \quad \text{avec} \quad dy = p\,dx\,;$$

$$dx[f(p) - (p)] + dp[xf'(p) + \varphi'(p)] = 0 \qquad (2)$$

équation linéaire si l'on considère x comme la fonction et p comme la variable. On résout en $x = \psi(p, c)$, et l'on élimine p entre (1) et (2).

3° Équation de Clairaut (cas particulier du précédent)

$$y = xy' + \varphi'(y'). \qquad \text{Même méthode}.$$

On a $[x + \varphi'(p)]dp = 0$.

Solutions : $dp = 0$ et $x + \varphi'(p) = 0$,

$$p = y' = Cte \quad \text{et} \quad y = Cx + \varphi(C).$$

E) *Équations linéaires du premier ordre à coefficients constants.*

a) Sans second membre

$$\frac{dy}{dx} + py = 0.$$

Solution générale : $y = C\,e^{-px}$, avec C, une constante réelle.

b) Solution particulière de l'équation avec second membre.

α) Si le second membre est de la forme $P\,e^{\alpha x}$, P étant un polynôme entier en x et α une constante, une solution particulière est de la forme $x^k Q \cdot e^{ax}$, Q étant un polynôme de même degré que P et $k = 0$ ou 1 suivant que α n'est pas ou est racine de l'équation caractéristique $u + p = 0$.
On calcule les constantes par identification.

β) Si le second membre est de la forme $R \cos \beta x + S \sin \beta x$, R et S étant des polynômes en x et β une constante, une solution particulière est de la forme $T \cos \beta x + U \sin \beta x$, T et U étant des polynômes de degrés égaux au plus élevé des degrés de R et S.

γ) Si le second membre est de la forme

$$V + \sum P\,e^{\alpha x} + \sum (R \cos\beta x + S \sin\beta x)\,,$$

une solution particulière est de la forme :

$$x^{\gamma} W + \sum x^{k} Q\,e^{\alpha x} + \sum (T \cos\beta x + U \sin\beta x)\,,$$

avec les mêmes conditions que précédemment et W polynôme de même degré que V, $\gamma = 0$ ou 1 suivant que 0 n'est pas racine ou est racine de l'équation caractéristique.

2.3.2 Équations différentielles du deuxième ordre

A) *Équations linéaires à coefficients constants.*

a) Équations sans second membre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0\,.$$

Soit une solution de la forme $y = e^{ux}$, u étant une constante.
On détermine u par les racines de *l'équation caractéristique* :

$$u^2 + pu + q = 0.$$

1[er] cas : racines réelles, $p^2 - 4\,q > 0$.

$$y = C_1\,e^{u_1 x} + C_2\,e^{u_2 x}\ ;\ C_1,\ C_2 \text{ constantes arbitraires.}$$

u_1 et u_2 racines de l'équation caractéristique.

2[e] cas: $p^2 - 4q = 0$, $\quad y = e^{ux}(C_1\,x + C_2)$;
3[e] cas : $p^2 - 4\,q < 0$, $\quad y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

avec $\alpha + \beta i = u_1, \quad \alpha - \beta i = u_2$.

b) Équations avec second membre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x) .$$

Recherche d'une solution particulière,

α) Si le second membre est de la forme $P\, e^{\alpha x}$, P étant un polynôme en x, a une constante, une solution particulière est de la forme : $x^k\, Q\, e^{\alpha x}$; Q, polynôme de même degré que P.

$k = 0$ si α n'est pas racine de $u^2 + pu + q = 0$.
$k = 1$ si α est racine simple de $u^2 + pu + q = 0$.
$k = 2$ si α est racine double de $u^2 + pu + q = 0$.

On calcule les coefficients par identification.

β) Si le second membre est de la forme $R\cos\beta x + S\sin\beta x$, R et S étant des polynômes en x et β une constante, une solution particulière est de la forme

$$x^k(T\cos\beta x + U\sin\beta x) ,$$

T et U étant des polynômes de degré au plus égal au plus élevé des degrés de R et S, et $k = 0$ ou 1 suivant que βi n'est pas ou est racine de l'équation caractéristique.

γ) Cas général où le second membre est de la forme :

$$V + \sum P\, e^{\alpha x} + \sum (R\cos\beta x + S\sin\beta x) .$$

Une solution particulière est de la forme :

$$x^h W + \sum x^k Q\; e^{\alpha x} + \sum x^l (T\cos\beta x + U\sin\beta x) ,$$

avec les conditions ci-dessus.
Les coefficients se calculent par identification.
La solution générale est donc $y + y_1$, y étant la solution générale de l'équation sans second membre (calculée en *a*) et y_1, une solution particulière de l'équation avec second membre.

δ) En utilisant la transformation de Laplace (voir ci-après).

B) *Équations de la forme* $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$.

On résout par 2 intégrations :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C_1$$

$$y = \int F(x)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2 = \Phi(x) + C_1 x + C_2.$$

C) *Équations de la forme* $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(y)$.

On multiplie les 2 membres par $2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 2f(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 2\int f(y)\mathrm{d}y + C_1 = 2\ F(y) + C_1,$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\ F(y) + C_1}} \quad \text{et} \quad x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\ F(y) + C_1}} + C_2.$$

D) *Équations de la forme* $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f\left(x, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

On pose $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(x, u)$: équation du premier ordre.

E) *Équations de la forme* $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0$, p et q étant des fonctions algébriques et répondant aux *conditions* (*dites de Fuchs*).

$$p(x) = \frac{A}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots$$

$$q(x) = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \beta_0 + \beta_1 x + \ldots$$

Ce genre d'équation s'intègre par des développements en séries représentant des fonctions particulières dont les principales sont :

Fonctions de Bessel : $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$.

Polynômes de Legendre : $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$.

Fonction hypergéométrique : $(x^2 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + [(1 + \alpha + \beta)x - \gamma]\dfrac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$.

Polynômes de Jacobi : $(x^2 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + [(1 + p)x - q]\dfrac{dy}{dx} - n(p + n)y = 0$.

Polynômes d'Hermite : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0 \qquad \alpha = Cte.$

Polynômes de Laguerre : $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (1 - x)\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

Polynômes de Gegenbauer : $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x(\alpha + 1)\dfrac{dy}{dx} + n(n + 2\alpha)y = 0$.

Polynômes de Tchebytcheff : $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + n^2y = 0$.

(Voir au chapitre des fonctions particulières, les propriétés de certaines de ces fonctions.)

2.3.3 Intégration des équations différentielles au moyen de la transformation de Laplace

Principe. — On exprime $x, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ en fonction des images de y. [Voir le tableau des transformées des expressions $th(t)$, $t^2 h(t)$, $h'(t)$, $th'(t)$, $t^2h'(t)$, ...] Il en résulte une équation différentielle en p d'un ordre généralement inférieur. L'avantage de la méthode est que les relations ci-dessus dépendent

de $y(0)$, $y'0$, ce qui permet d'introduire immédiatement des conditions que, par la méthode générale, on est obligé d'utiliser pour calculer les constantes.

Exemple : $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{dy}{dx} = \sin x$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0, y''(0) = 0$.

Posons $\dfrac{dy}{dx} = u$; $\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = \sin x$.

Soit F image de u. On a :

$$Fp^2 + F = \frac{1}{p^2+1}, \quad F = \frac{1}{(p^2+1)^2}, \quad u = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t),$$

et
$$y = \frac{1}{2}\int(\sin t - t\cos t)\,dt\ ;$$

en tenant compte de $y(0) = 0$ et en revenant à la variable x :

$$y = 1 - \cos x - \frac{1}{2}x\sin x.$$

2.3.4 Systèmes différentiels linéaires

On s'intéresse au système $(S) Y' = A(x)Y + P(x)$, où Y est une application dérivable d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. $A(x)$ est une matrice $n \times n$ et P une application de I dans $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION. — Soient $V_1, \dots, V_n$, n solutions de (S). On appelle *wronskien* de $V_1, \dots, V_n$, l'application W définie sur I par : $W(x) = \det(V_1(x), \dots, V_n(x))$.

Résolution de (S).

Supposons que l'on sache déterminer n solutions $V_1, \dots, V_n$ du système homogène associé à (S), c'est-à-dire (H) $Y' = A(x)Y$. S'il existe $x_0 \in I$ tel que le wronskien de $V_1, \dots, V_n$ en ce point soit non nul, alors on peut en déduire que $V_1, \dots, V_n$ forme une base de solutions de (H).

On peut alors adapter la méthode de variation de la constante en cherchant les solutions de (S) sous la forme $V = \lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n$, avec λ_1, …, λ_n, n fonctions à valeurs réelles. Alors V est solution de (S) si, et seulement si $V' = A(x)V$, qui se réécrit, compte tenu du fait que V_i est solution de (H) : $\lambda'_1 V_1 + \ldots + \lambda'_n V_n = P(x)$. Les V_i étant indépendants, on obtient un système linéaire de Cramer d'inconnue $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ que l'on peut résoudre. Il suffit d'intégrer les solutions pour obtenir V.

Cas où A est constante.

On cherche à résoudre le système homogène $Y' = AY$. A étant une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable dans une base de vecteurs propres. Il existe donc une matrice P, inversible et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients dans $\mathbb{C}$ telles que $A = P^{-1}TP$. Le changement d'inconnue $Z = [z_1, \ldots, z_n]' = PY$ nous conduit à résoudre le système différentiel $Z' = TZ$. On détermine de prime abord z_n qui est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. En remontant les lignes du système, z_{n-1} est solution d'une équation différentielle faisant intervenir z_n. En réinjectant l'expression de z_n dans l'équation donnant z_{n-1}, on trouve z_{n-1}, et ainsi de suite... On en déduit successivement l'expression de toutes les composantes de Z, puis Y, car $Y = P^{-1}Z$.

2.3.5 Méthodes numériques de résolution des équations différentielles

Pré-requis : soit $\vec{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit la norme euclidienne du vecteur $\vec{u}$ par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$.

Le problème : on s'intéresse à la résolution numérique d'équations différentielles s'écrivant

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in (0, T) \\ y(0) = \tilde{y}_0. \end{cases}$$

On a vu précédemment que toute équation différentielle peut se mettre sous cette forme. y est donc une fonction définie sur $[0,T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et f, une application définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour mettre en œuvre les méthodes numériques, on introduit une subdivision de l'intervalle $[0,T]$: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = T$. On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$ et h, la valeur maximale des h_i. On définit l'erreur de consistance, notée $silon_i$, qui représente l'erreur que l'on fait au $i^{\text{ème}}$ pas en remplaçant l'équation différentielle par l'équation discrétisée :

$$\varepsilon_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) - h_i f(x_i, y(x_i)).$$

On dit qu'une méthode numérique est consistante si la somme $\|\varepsilon_1\| + \ldots + \|\varepsilon_n\|$ tend vers 0 quand h tend vers 0. On dit qu'une méthode numérique est d'ordre p si l'on peut montrer que cette somme est inférieure à Kh^p, où K est une constante réelle strictement positive.

Méthodes d'Euler.

La méthode d'Euler explicite. — Elle s'écrit :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i),\ i = 0, \ldots, n-1 \\ y_0 = \tilde{y_0}. \end{cases}$$

Cette méthode est d'ordre 1.

La méthode d'Euler implicite. — Elle s'écrit :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h_i f(x_{i+1}, y_{i+1}),\ i = 0, \ldots, n-1 \\ y_0 = \tilde{y_0}. \end{cases}$$

La détermination de y_{i+1} nécessite de résoudre un problème. Cette méthode est également d'ordre 1.

Les θ*-méthodes.*

On choisit un réel θ dans l'intervalle $[0,1]$. Ces méthodes s'écrivent :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h_i[\theta f(x_{i+1}, y_{i+1}) + (1-\theta) f(x_i, y_i)],\ i = 0, \ldots, n-1 \\ y_0 = \tilde{y_0}. \end{cases}$$

Si $\theta = 0$, on retrouve la méthode d'Euler explicite et si $\theta = 1$, on retrouve la méthode d'Euler implicite. Si $\theta \neq 1/2$, cette méthode est d'ordre 1. En revanche si $\theta = 1/2$, elle devient d'ordre 2. Ce choix est souvent appelé *méthode de Crank-Nicholson.*

Méthodes de Runge-Kutta.

Ces méthodes reposent sur la mise sous forme intégrale des équations différentielles et l'utilisation de méthodes d'intégration numérique plus ou moins précises.

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. — Elle s'écrit :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{2}(k_1^i + k_2^i), \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ k_1^i = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2^i = h_i f(x_i + h_i, y_i + k_1^i) \\ y_0 = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. — Elle s'écrit :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ k_1^i = h_i f(x_i, y_i) \\ k_2^i = h_i f\left(x_i + \dfrac{h_i}{2}, y_i + \dfrac{k_1^i}{2}\right) \\ k_3^i = h_i f\left(x_i + \dfrac{h_i}{2}, y_i + \dfrac{k_2^i}{2}\right) \\ k_2^i = h_i f(x_{i+1}, y_i + k_3^i) \\ y_0 = \tilde{y}_0 . \end{cases}$$

Méthodes à pas multiples.

Les méthodes à s pas utilisent, pour calculer une valeur approchée y_{i+1} de $y(x_{i+1})$, l'information obtenue aux points x_i, $\cdots$, x_{i-s}.

La méthode d'Adams-Bashforth à 4 pas. — Connaissant quatre valeurs approchées $y_0, \ldots, y_3$ de $y(x_0), \ldots, y(x_3)$, on passe à l'itération suivante grâce à la formule :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[55f(x_i, y(x_i)) - 59f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 37f(x_{i-2}, y(x_{i-2})) - 9f(x_{i-3}, y(x_{i-3}))].$$

Cette méthode est d'ordre 4, mais peut présenter une certaine instabilité numérique. Pour pallier ce problème, on peut utiliser des méthodes implicites telles que :

La méthode d'Adams-Moulton à 3 pas. — Cette fois, la formule de récurrence est implicite et nécessite la résolution d'un problème :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[9f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + 19f(x_i, y(x_i)) - 5f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + f(x_{i-2}, y(x_{i-2}))].$$

Cette méthode est d'ordre 4 et stable.

2.4 Équations intégrales

Définition. – Équations de la forme :

$$\varphi(s) - \lambda\int_a^b G(s, t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(s),$$

l'inconnue étant la fonction φ ; $f(s)$: fonction connue et intégrable ; λ : terme numérique réel quelconque ; $G(s, t)$: noyau de l'équation.

Premier cas : Le *noyau est dégénéré*, c'est-à-dire est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions $\alpha(s)$ par des fonctions $\beta(t)$:

$$G(s, t) = \sum_1 \alpha_i(s)\beta_i(t).$$

On pose

$$\int_a^b \beta_i(t)\alpha_k(t)\,\mathrm{d}t = t_k^i \quad \text{et} \quad \int_a^b \beta_i(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f_i,$$

et

$$\varphi(s) = \lambda \sum_1^n x_i \alpha_i(s) + f(s) .$$

Les x_i sont solutions du système linéaire :

$$x_1 - \lambda(t_1^1 x_1 + t_2^1 x_2 + \dots + t_n^1 x_n) = f_1,$$

$$x_2 - \lambda(t_1^2 x_1 + t_2^2 x_2 + \dots + t_n^2 x_n) = f_2,$$

....

$$x_n - \lambda(t_1^n x_1 + t_2^n x_2 + \dots + t_n^n x_n) = f_n.$$

Sous réserve que $1/\lambda$ ne soit pas une valeur propre de la matrice M du système, la solution est donnée par

$$\varphi(s) = \lambda \sum_1^n x_i \alpha_i(s) + f(s) .$$

Deuxième cas : Equations résolubles par la transformation de Laplace.
a) Cas où le noyau est égal à 1 et l'intervalle d'intégration de 0 à s :

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^s \varphi(t)\mathrm{d}t + f(s) .$$

On prend les images des 2 membres.
Φ, image de φ ; F image de f.
On a :

$$\Phi - \lambda \frac{\Phi}{p} = F, \quad \Phi = \frac{pF}{p-\lambda} .$$

Connaissant F, on en déduit Φ et φ.
b) Equation de Volterra. Noyau : $K(t-\tau)$ et K fonction connue de τ. L'équation est

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t \varphi(\tau) K(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) .$$

Soit F image de φ, Φ image de K, G image de f.

On a

$$F - \lambda F\Phi = G, \quad F = \frac{G}{1 - \lambda\Phi}.$$

Troisième cas: Cas général. – On recherche une solution de la forme :

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \lambda\varphi_1(s) + \lambda^2\varphi_2(s) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(s) + \ldots.$$

Par identification, on calcule :

$$\varphi_0(s) = f(s),$$

$$\varphi_1(s) = \int_a^b G(s, t)\varphi_0(t)\,dt,$$

$$\varphi_n(s) = \int_a^b G(s, t)\varphi_{n-1}(t)\,dt,$$

relations qui permettent de calculer les φ de proche en proche.
Il faut toutefois s'assurer de la convergence de la série, qui sera certaine si :

$$|\lambda| < \frac{1}{B(b - a)}.$$

B étant une borne supérieure du noyau $G(s,t)$.
La série est appelée série de Liouville-Neumann.

Si l'on pose $G_n(x, t) = \int_a^b G(x, u)\,G_{n-1}(u, t)\,du$:

$$\varphi_n(x) = \int_a^b G_n(x, t)\varphi_0(t)\,dt.$$

Les G_n sont appelés les noyaux itérés.

2.5 Calcul des variations

Le calcul des variations est une partie des mathématiques qui traite du maximum ou du minimum de certaines intégrales dépendant d'une ou plusieurs fonctions inconnues.
Le plus simple des problèmes du calcul des variations est le suivant : soit F une fonction donnée des variables x, y, y' continue et ayant des dérivées

partielles jusqu'au deuxième ordre. Soit, d'autre part, un arc de courbe AB du plan, susceptible d'être représenté par une fonction $y = f(x)$ continue et dérivable et l'intégrale

$$I = \int_{AB} F(x, y, y')\mathrm{d}x .$$

Il s'agit de déterminer si parmi les courbes des fonctions f il en existe une qui rende maximale ou minimale l'intégrale I et de déterminer cette fonction f.
La fonction $y = f(x)$ doit vérifier l'équation différentielle suivante dite *équation d'Euler* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

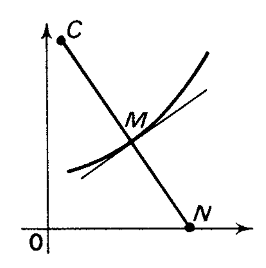
Application. — Courbes extrémales de l'intégrale

$$I = \int y^m \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x ,$$

dans laquelle m désigne un exposant positif, négatif ou nul.
Après transformations, l'équation d'Euler s'écrit

$$m(1 + y'^2) - (yy'' = 0) .$$

Sous cette forme, cette équation est identique à celle des courbes pour lesquelles on a la relation



$$\frac{\overline{MC}}{MN} = -\frac{1}{m} ,$$

MC étant le rayon de courbure de la courbe en M et MN la portion de la normale comprise entre M et l'axe des x. Ces courbes sont dites *courbes de Ribeaucour.* Pour $m = 1$, on a $(1 + y'^2) - yy'' = 0$.
Les courbes sont des chaînettes.

$m = -1$, $(1 + y'^2) + yy'' = 0$. Cercles.

$m = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(1 + y'^2) - yy'' = 0$. Paraboles.

$m = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(1 + y'^2) + yy'' = 0$. Cycloides.

2.6 Optimisation dans $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|_2$, mais tous les résultats énoncés ici tiennent encore si l'on munit $\mathbb{R}^n$ d'une autre norme.

2.6.1 Résultats théoriques

Cadre de l'étude.

Soit f une application définie sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. Tout problème d'optimisation se met sous l'une ou l'autre des formes :

$$(1)\ \begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases} \quad \text{ou } (2)\ \begin{cases} \max f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

On peut se contenter d'étudier les problèmes de type (1) en remarquant que maximiser f sur D équivaut à minimiser $-f$ sur D.

Existence de solutions.

Le problème (1) possède (au moins) une solution si l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :

1° D est fermé, borné (i.e. il existe une constante strictement positive M telle que pour tout x dans D, $\|x\|_2 \leq M$) et f est continue sur D.

2° D est fermé (pas nécessairement borné), f est continue et coercive (i.e. $\lim\limits_{\|x\|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty$) sur D.

Unicité des solutions.

On obtient en général l'unicité à l'aide d'arguments de convexité.

DÉFINITIONS.

1° Un ensemble D est dit convexe si pour tous éléments x et y dans D et pour tout t dans $[0,1]$, $tx + (1-t)y$ est lui aussi dans D.

2° Une application f définie sur un sous-ensemble convexe $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles est dite convexe (resp. strictement convexe) si pour tous x, y éléments de D et tout t élément de $[0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (resp. $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$).

Voici un résultat garantissant l'unicité de solutions d'un problème d'optimisation : si une application f définie sur un ensemble D convexe est convexe, alors tout minimum local de f est global. Si f est strictement convexe, alors il y a au plus un minimum global.

Conditions d'optimalité au premier ordre.

1° Optimisation sans contrainte. Un problème d'optimisation sans contrainte s'écrit de façon générale :

$$(3) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Si f est régulière (de classe C^1 par exemple), la condition d'optimalité au premier ordre s'écrit :

$$x^* \text{ solution de } (1) \Rightarrow \nabla f(x^*) = 0\,.$$

On dit alors que x^* est un point « stationnaire » ou « critique ».

2° Optimisation sous contraintes. Un problème d'optimisation sous contraintes s'écrit de façon générale :

$$(4) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C, \end{cases}$$

où C est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On distingue différents types de contraintes :

(a) *Contraintes de type égalité.* S'il y a p contraintes de ce type, on les met toujours sous la forme $h(x) = 0$, où $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$x \mapsto h(x) = (h_1(x), \ldots, h_p(x))\,.$$

(b) *Contraintes de type inégalité.* S'il y a q contraintes de ce type, on les met toujours sous la forme $g(x) \leq 0$, où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$

$$x \mapsto g(x) = (g_1(x), \ldots, g_p(x)),$$

l'inégalité ayant lieu composante par composante.

Supposons que l'ensemble des contraintes soit :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | h(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) \leq 0\}\,.$$

DÉFINITION. — On dit que les contraintes sont qualifiées au point x^* si : ou bien les fonctions g_i sont affines, ou bien les vecteurs $\nabla g_i(x^*)$ sont linéairement indépendants, pour tout i tel que $g_i(x^*) = 0$.

Si x^* est solution de (4) et que les contraintes sont qualifiées en x^*, alors il existe p nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et q nombres réels positifs $\mu_1, \dots, \mu_q$, appelés *multiplicateurs de Lagrange* tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla_1(x^*) + \ldots + \lambda_p \nabla_p(x^*) + \mu_1 \nabla g_1(x^*) + \ldots + \mu_q \nabla g_q(x^*) = 0 \\ \mu_j g_j(x^*) = 0 \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, q\} \\ x^* \in C. \end{cases}$$

On appelle ces conditions nécessaires *conditions de Kuhn-Tucker.*

Condition d'optimalité au deuxième ordre.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une application de classe C^1. Soit x^* tel que $\nabla f(x^*) = 0$. On appelle matrice hessienne de f au point x^* la matrice $D^2 f(x^*)$ dont le terme à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Si toutes les valeurs propres de $D^2 f(x^*)$ sont strictement positives, alors x^* est un minimum local pour f.

2.6.2 Quelques méthodes numériques d'optimisation

On s'intéresse à la résolution numérique du problème (1). On présentera notamment des algorithmes dits de descente, c'est-à-dire que x^*, solution du problème (1) sera vu comme la limite d'une suite (x_k) de points de D telle que :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k, \end{cases}$$

où d_k est un vecteur de R^n appelé *direction de descente* et ρ_k, le pas de la méthode itérative, choisis de telle sorte que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

■ Algorithmes unidimensionnels ou recherche du pas

Ces algorithmes permettent d'optimiser une fonction d'une variable à valeurs réelles. On s'intéresse donc ici au problème :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in [a,b]. \end{cases}$$

1° *Méthode de la section dorée.*

On appelle t_0 le point de $[a,b]$ en lequel f est minimale. On suppose que f est décroissante sur $[a,t_0]$ et croissante sur $]t_0,b]$ (on dit alors que f est *unimodale*). On pose $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. τ est le *nombre d'or*. L'idée est de construire une suite d'intervalles $[a_k,b_k]$ contenant tous les points t_0 réalisant le minimum de f.

– Initialisation. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

– Itération k. a_k et b_k étant connus, on calcule :

$$a' = a_k + \frac{1}{\tau^2}(b_k - a_k) \quad \text{et} \quad b' = a_k + \frac{1}{\tau}(b_k - a_k)$$

Si $f(a') < f(b')$, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = b'$.

Sinon, on pose $a_{k+1} = a'$ et $b_{k+1} = b_k$.

Critère d'arrêt. On arrête l'algorithme lorsque $|b_k - a_k| < tol$, où tol est un paramètre (petit) fixé par l'utilisateur.

2° *Méthode d'interpolation parabolique.*

L'idée consiste à remplacer la courbe de la fonction f par une parabole, et à rechercher le minimum de celle-ci.

– Initialisation. On choisit x_0, y_0 et z_0 dans $[a;b]$ tels que $f(x_0) \geq f(y_0)$ et $f(z_0) \geq f(y_0)$.

– Itération k. On pose $q[x_k;y_k]=\dfrac{q(y_k)-q(x_k)}{y_k-x_k}$, $q[x_k;y_k;z_k]=\dfrac{q[x_k;z_k]-q[x_k;y_k]}{z_k-x_k}$ et $y_{k+1}=\dfrac{x_k+y_k}{2}-\dfrac{q[x_k;y_k]}{2q[x_k;y_k;z_k]}$.

Si $y_{k+1}\in[x_k;y_k]$ alors on pose $x_{k+1}=x_k$ et $z_{k+1}=y_k$.
Sinon, si $y_{k+1}\in[y_k;z_k]$ alors on pose $x_{k+1}=y_k$ et $z_{k+1}=z_k$.

– Critère d'arrêt. On s'arrête par exemple lorsque $|y_{k+1}-y_k|<tol$, où *tol* est un paramètre (petit) fixé.

3° *Méthode de Goldstein (1967).*

On choisit m_1 et m_2 tels que $0<m_1<m_2<1$. On recherche un pas ρ qui vérifie :

$$\begin{cases} f(x)\le f(0)+m_1\rho f'(0) \\ f(x)\ge f(0)+m_2\rho f'(0). \end{cases}$$

4° *Méthode de Wolfe (1969).*
On choisit m_1 et m_2 tels que $0<m_1<m_2<1$. On recherche un pas ρ qui vérifie :

$$\begin{cases} f(x)\le f(0)+m_1\rho f'(0) \\ f'(x)\ge m_2 f'(0). \end{cases}$$

■ Optimisation sans contrainte

On s'intéresse dans cette partie à la résolution approchée de problèmes du type :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x\in R^n, \end{cases}$$

où $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

1° *Méthodes de gradient.*

Un algorithme de type gradient s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ x_{k+1}=x_k-\rho_k\nabla f(x_k). \end{cases}$$

Pour le pas ρ_k, on peut choisir :

– ρ_k constant. C'est la méthode du *gradient à pas fixe* ;

– ρ_k qui minimise la fonction d'une variable $\rho \mapsto f(x_k - \rho \nabla f(x_k))$. Il s'agit de la méthode du *gradient à pas optimal*. La recherche du pas optimal peut parfois s'avérer coûteuse. C'est pourquoi on utilise parfois les algorithmes unidimensionnels présentés précédemment pour rechercher le pas.

Convergence de ces algorithmes. $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne, et x^* un minimum de *f*. Si *f* est α-convexe (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous *x*, *y* dans $\mathbb{R}^n$, $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \geq \alpha \|x - y\|_2^2$), si ∇f est lipschitzienne (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tous *x*, *y* dans $\mathbb{R}^n$, $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq M \|x - y\|_2$) et s'il existe deux réels *a* et *b* tels que le pas variable vérifie $0 < a \leq \rho_k \leq b < \dfrac{2\alpha}{M^2}$, la méthode de gradient converge de façon géométrique, c'est-à-dire qu'il existe $\beta \in \,]0, 1[$ tel que :

$$\left\|x_k - x^*\right\|_2 \leq \beta^n \left\|x_0 - x^*\right\|_2 .$$

Remarque : dans ce cas, une méthode de gradient converge vers un minimum local de *f*. Rien n'assure qu'il soit global.

2° *Méthode du gradient conjugué.*

On cherche à minimiser dans $\mathbb{R}^n$ une fonctionnelle quadratique s'écrivant :

$$f(x) = \frac{1}{2} x' A x + b \cdot x,$$

où *A* est une matrice symétrique de taille $n \times n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives (ce qui assure que le minimum cherché existe), *b* un vecteur colonne de taille *n*. On a alors $\nabla f(x) = Ax + b$. L'alorithme présenté ci-après converge en théorie vers le minimum de *f* en au plus *n* itérations.

– Initialisation. On choisit x_0. On pose $g_0 = Ax_0 + b$, $d_0 = -g_0$, et $k = 0$.

– Pour $k = 0, 1, \ldots, n$, on calcule : $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$, avec :

$$\rho_k = -\frac{g_k' d_k}{d_k' A d_k}, \; g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1}), \; d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k \text{ et } \beta_k = \frac{g_{k+1}' A d_k}{d_k' A d_k} .$$

3° *Méthode de Polak-Ribière.*

Cette méthode permet de déterminer le minimum de fonctionnelles quelconques (pas nécessairement quadratiques). Il généralise la méthode du gradient conjugué.

– Initialisation. On choisit x_0. On pose $d_0 = -\nabla f(x_0)$ et $k = 0$.

– Tant que $\|x_k - x_{k-1}\|_2 \leq tol$, où tol est un paramètre fixé, on calcule :

$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$, avec :

– ρ_k qui minimise $\rho \mapsto f(x_k + \rho d_k)$, ou bien plus simplement, on mène une recherche du pas comme dans les algorithmes unidimensionnels présentés précédemment ;

– $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k$, avec $\beta_k = \frac{(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) \cdot \nabla f(x_k)}{\nabla f(x_k) \cdot \nabla f(x_k)}$.

4° *Méthode de Newton.*

– Initialisation. On choisit x_0.

– Tant que $\|x_k - x_{k-1}\|_2 \leq tol$, où tol est un paramètre fixé,

– on résout le système linéaire d'inconnue r_k : $D^2 f(x_k) r_k = \nabla f(x_k)$;

– on pose $x_{k+1} = x_k - r_k$.

5° *Méthodes de Quasi-Newton.*

– Initialisation. On choisit x_0.

– Tant que $\|x_k - x_{k-1}\|_2 \leq tol$, où tol est un paramètre fixé, on calcule :

$$x_{k+1} = x_k - H_k \nabla f(x_k),$$

où H_k est une matrice qui approche l'inverse de la matrice hessienne $D^2 f(x_k)$. Il existe plusieurs façons de la choisir. Posons $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

– Algorithme DFP (Davidon-Fletcher-Powell).

$$H_{k+1} = H_k + \frac{s_k s'_k}{y_k \cdot s_k} - \frac{H_k y_k y'_k H_k}{y'_k H_k y_k}$$

– Algorithme BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

$$H_{k+1} = H_k + \frac{s_k y'_k H_k + H_k y_k s'_k}{y_k \cdot s_k} + 1 + \left(\frac{y'_k H_k y_k}{y_k \cdot s_k}\right)\frac{s_k s'_k}{y_k \cdot s_k}.$$

■ Optimisation sous contraintes

On s'intéresse dans cette partie à la résolution approchée de problèmes du type :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C, \end{cases}$$

où C est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par des contraintes égalités ou inégalités. Bien souvent, on se ramène à la résolution d'une suite de problèmes sans contrainte.

1° *Méthode de projection.*

On suppose que C est un convexe fermé. On sait alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $P_C(x)$ (le point de C le plus proche de *x*) appelé *projection de* x *sur* C. On se donne un algorithme de minimisation sans contrainte que l'on note $\mathcal{A}$ (par exemple une méthode de gradient ou de Newton). L'algorithme de projection s'écrit :

– Initialisation. On se donne x_0 dans $\mathbb{R}^n$.

– Tant que $\|x_k - x_{k-1}\|_2 \le tol$, où tol est un paramètre fixé, on fait :

– $\widehat{x_{k+1}} = \mathcal{A}(x_k)$.

– $x_{k+1} = P_C(\widehat{x_{k+1}})$.

On connaît l'expression de l'opérateur de projection dans certains cas :

– $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \ge a_i\}$. Si $j \ne j$, $(P_C(x))_j = x_j$ et $(P_C(x))_i = \max(x_i, a_i)$.

– $C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i\le a_i\}$. Si $j\neq j$, $(P_C(x))_j=x_j$ et $(P_C(x))_i=\min(x_i,a_i)$.

– $C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_i\le x_i\le b_i\}$. Si $j\neq j$, $(P_C(x))_j=x_j$ et
$(P_C(x))_i=\min(\max(x_i,a_i),b_i)$.

– $C=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \left\|x-x_0\right\|_2\le R\right\}$.

$$P_C(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in C \\ x_0+R\dfrac{x-x_0}{\left\|x-x_0\right\|_2} & \text{si } x\notin C. \end{cases}$$

2° *Algorithme d'Uzawa.*
On suppose que l'ensemble des contraintes s'écrit :

$$C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid h(x)=0 \text{ et } g(x)\le 0\},$$

où $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ et $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^q$. On définit le Lagrangien de ce problème, pour $\mu=\left(\mu^1,\ldots,\mu^p\right)$ et $\lambda=\left(\lambda^1,\ldots,\lambda^q\right)$ par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q &\to \mathbb{R} \\ (x,\mu,\lambda) &\mapsto f(x)+\mu^1 h_1(x)+\ldots+\mu^p h_p(x)+\lambda^1 g_1(x)\ldots+\lambda^q g_q(x). \end{aligned}$$

– Initialisation. $k=0$, on choisit $\mu_0\in\mathbb{R}^p$ et $\lambda_0\in\mathbb{R}^q$.
– Itération. Tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait :

– Calculer $x_k\in\mathbb{R}^n$ solution de $\left(\mathcal{P}_k\right)\begin{cases}\min\ \mathfrak{L}\left(x,\mu_k,\lambda_k\right)\\ x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$, à l'aide d'une méthode d'optimisation sans contrainte.

– Calculer μ_{k+1} et λ_{k+1} avec $\begin{cases}\mu_{k+1}^i=\mu_k^i+\rho h_i(x_k), \quad i=1,\ldots,p\\ \lambda_{k+1}^j=\max(0,\lambda_k^j+\rho g_j(x_k)), \quad j=1,\ldots m\end{cases}$

où $\rho>0$, est un réel fixé (par l'utilisateur).

Convergence de l'algorithme d'Uzawa.

On suppose que f est C^1, α-elliptique (i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, $\nabla f(x) - \nabla f(y) \cdot (x - y) \geq \alpha \|x - y\|_2^2$), que h est affine, que g est convexe de classe C^1 et que h et g sont lipschitziennes. On suppose que le problème de minimisation sous contrainte possède (au moins) une solution.

Alors, il existe $\rho_1 < \rho_2$ positifs tels que pour tout $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$, la suite (x_k) générée par l'algorithme d'Uzawa converge vers la solution du problème de minimisation.

3 • FONCTIONS DIVERSES

3.1 Intégrales de Fresnel

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t, \qquad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^\infty \cos t^2 \mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \;;$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Développements en série :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)\,!}\,\frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)\,!}\,\frac{x^{4n+1}}{4n+3}.$$

Expressions en fonction des fonctions de Bessel :

$$\int_0^x \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = J_{3/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + J_{7/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots + J_{(4n+3)/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots$$

$$\int_0^x \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = J_{1/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + J_{5/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots + J_{(4n+1)/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots$$

3.2 Sinus intégral et cosinus intégral

$$\mathrm{Si}\quad(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \qquad Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \quad .$$

Si on pose $\mathrm{si}\,(x) = -\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, on a $\mathrm{Si}\,(x) = \frac{\pi}{2} + si(x)$.

Développement en série :

$$\mathrm{Si}\,(x) = \frac{x}{1.1\,!} - \frac{x^3}{3.3\,!} + \frac{x^5}{5.5\,!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)\,!} + \ldots\ ;$$

$$Ci(x) = \ln x + C - \frac{x^2}{2.2\,!} + \frac{x^4}{4.4\,!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)\,!}, \quad \mathrm{C} = \text{constante d'Euler} ;$$

$$Ci(x) = \ln x + C - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Développement en série asymptotique :

$$\mathrm{Si}\,(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)\,!}{x^{2n}} - \frac{\sin x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)\,!}{x^{2n+1}},$$

$$Ci(x) = \frac{\sin x}{x}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(2n)\,!}{x^{2n}} - \frac{\cos x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)\,!}{x^{2n+1}}.$$

VALEURS DES MAXIMUMS ET MINIMUMS DE Si (x) ET Ci (x).

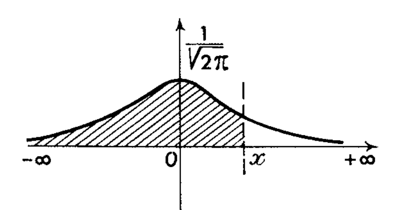
x	Si(x)	x	Ci(x)
π	+ 1,851 94	0,5 π	+ 0,472 00
2 π	+ 1,418 16	1,5 π	– 0,198 41
3 π	+ 1,674 76	2,5 π	+ 0,123 77
4 π	+ 1,492 161	3,5 π	+ 0,089 564
5 π	+ 1,633 964	4,5 π	+ 0,070 065
6 π	+ 1,518 034	5,5 π	– 0,057 501
7 π	+ 1,616 085	6,5 π	+ 0,048 742
8 π	+ 1,531 131	7,5 π	– 0,042 292
9 π	+ 1,606 076	8,5 π	+ 0,037 345
10 π	+ 1,539 029	9,5 π	– 0,033 433
11 π	+ 1,599 685	10,5 π	+ 0,030 260
12 π	+ 1,544 307	11,5 π	– 0,027 637
13 π	+ 1,595 252	12,5 π	+ 0,025 432
14 π	+ 1,548 083	13,5 π	– 0,023 552
15 π	+ 1,591 997	14,5 π	+ 0,021 931
		15,5 π	– 0,020 519

3.3 Fonction Θ ou fonction d'erreur et fonction Π

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Relation
$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2\Pi(x).$$

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$$



Représentation : Courbe en cloche représentative de la fonction de Gauss $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

$\Pi(x)$ = aire de la courbe en cloche située à gauche de l'abcisse x.

Développement en série de $\Phi(x)$:

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x - \frac{x^3}{1\,!\,3} + \frac{x^5}{2\,!\,5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n\,!\,(2n+1)} + \ldots\right].$$

Développement asymptotique de $1 - \Theta(x)$:

$$1 - \Theta(x) \simeq \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{2^2x^4} - \frac{1.3.5}{2^3x^6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}x^{2n-2}}\right]$$

Tables (voir tables statistiques).

3.4 Fonctions eulériennes

Fonction de première espèce (fonction bêta)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt.$$

Fonction de deuxième espèce (fonction gamma [Γ]) :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} \, du, \quad \text{avec} \quad x > 0 .$$

Propriété principale :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) .$$

Si $x < 0$, fonction définie entre 0 et 1, 1 et 2, ... par $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$.
Relation avec l'intégrale de première espèce :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} .$$

Propriétés : $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$, a non entier

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-b\right) = \frac{\pi}{\cos \pi b} .$$

Formule de duplication :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \Gamma(p) = \frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) .$$

On en tire

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)}{2^p\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} .$$

Dérivée de $\ln \Gamma(x)$:

$$\frac{d}{d\alpha}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{\infty}\left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}\right]\frac{dx}{x} .$$

Fonction $\psi(x) = \dfrac{d}{d\alpha}\ln\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln n - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dots + \dfrac{1}{x+n}\right)\right]$

$$\psi(1) = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\left[\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right] = -C \quad \text{(constante d'Euler)}$$

$$\simeq 0{,}577\,215\,664\,9$$

$\psi(2) = (1 - C)$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x+n)^2} + \ldots .$$

FORMULE DE STIRLING :

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \frac{\alpha}{x^3}\right),$$

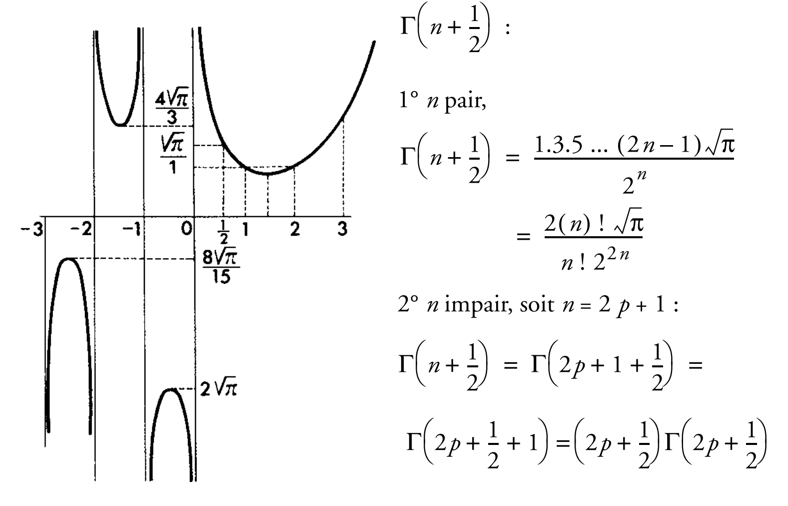
avec $\alpha \to 0$ (valeur approchée de Γ pour les grandes valeurs de x).

COURBE REPRÉSENTATIVE DE Γ :

Valeurs remarquables de $\Gamma(x)$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2\,!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$:

1° n pair,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} = \frac{2(n)\,!\,\sqrt{\pi}}{n\,!\,2^{2n}}$$

2° n impair, soit $n = 2p+1$:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(2p+1+\frac{1}{2}\right) =$$

$$\Gamma\left(2p+\frac{1}{2}+1\right) = \left(2p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2p+\frac{1}{2}\right)$$

et l'on est ramené au cas n pair.
Minimum de $\Gamma(x)$ dans la partie positive des x : 0,885 60 pour $x = 1{,}461\,63$.

INTÉGRALES S'EXPRIMANT PAR DES FONCTIONS EULÉRIENNES :

Intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

a) n pair :

$$I_n = \frac{1.3.5 \ldots (n-1)\pi}{2^{(n/2)+1}\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5 \ldots (n-1)}{2.4.6 \ldots n}.$$

b) n impair :

$$I_n = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \; 2^{(n-1)/2}}{1.3.5 \ldots n}.$$

c) α quelconque, mais > – 1 :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Intégrales de la forme $I_p = \int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^p x \, dx = 2^{-p} \int_0^{\pi/2} \sin^p 2x \, dx$:

$$I_p = 2^{-p}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(p+1)}$$

(voir tableau des intégrales définies).

Fonctions elliptiques :

$$I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}}, \qquad J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}},$$

$$I = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2}{\pi\sqrt{3}\;2^{4/3}}\right), \qquad J = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2,$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^n}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}\right\}$$ (voir tableau des intégrales définies),

3.5 Fonction hypergéométrique

C'est une solution de l'équation différentielle :

$$(z^2 - z)y'' + [(1+\alpha+\beta)z - y]y' + \alpha\beta y = 0\ .$$

Développement en série

$$F(\alpha, \beta, \gamma\ ;\ z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}z^2 + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+p-1)}{1.2\ \dots\ p\cdot\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+p-1)}z^p + \dots\ .$$

La série hypergéométrique est génératrice de nombreuses fonctions.
– Si $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$, on a la série géométrique :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \qquad \text{convergente si } |z| < 1\ .$$

– Si $\alpha = -n$ (entier), $\alpha + \beta = p$, $\gamma = q > 1$:

$F(\alpha, \beta, \gamma\ ;\ z) = \Gamma(-n, p+n, q\ ;\ z)$; on a les polynômes de Jacobi ;

$$xF(1, 1, 2\ ;\ -x) = \ln(1+x)\ ;$$

$$F(-\alpha, \beta, \beta\ ;\ -x) = (1+x)^\alpha\ ;$$

$$xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\ ;\ x^2\right) = \arcsin x\ ; \qquad xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\ ;\ -x^2\right) = \mathrm{arctg}\, x\ ;$$

$$\text{Limite } F\left(1, \beta, 1 \,;\, \frac{x}{\beta}\right) = e^x \quad \text{quand} \quad \beta \to \infty\,;$$

$$\text{Limite de } F\left(\alpha, \beta, \frac{3}{2} \,;\, \frac{x^2}{4\alpha\beta}\right) = \sin x \quad \text{quand} \quad \alpha, \beta \to \infty\,.$$

3.6 Fonctions de Bessel

DÉFINITION. — Ce sont des intégrales J_α de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0\,, \qquad \alpha \text{ étant quelconque.}$$

Si α *n'est pas un entier,* l'intégrale générale de cette équation est de la forme $y = AJ_\alpha(x) + BJ_{-\alpha},(x)$, A et B étant 2 constantes quelconques et :

$$J_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n+\alpha}}{n\,!\,\Gamma(\alpha + n + 1)}\,.$$

J_α est appelée fonction de Bessel de 1re espèce.

Si α *est entier.* Dans ce cas J_α et $J_{-\alpha}$ ne sont pas indépendants. Il faut trouver une autre solution particulière de l'équation différentielle et l'on adopte souvent la fonction :

$$N_\alpha(x) = \frac{\cos\alpha\pi\, J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}\,.$$

Cas *particulier de* $\alpha = \pm k/2$, k étant un entier impair.

On démontre que par exception, dans ce cas, les 2 intégrales $J_{k/2}(x)$ et $J_{-k/2}(x)$ sont indépendantes et l'intégrale générale est encore de la forme

$$AJ_{k/2}(x) + BJ_{-k/2}(x)\,.$$

3.6.1 Différentes représentations des fonctions de Bessel

$$J_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n+\alpha}}{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)},$$

$$J_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^1 x^{\alpha-1/2}(1-x)^{-1/2}\cos[z(1-x)^{1/2}]\,\mathrm{d}x,$$

$$J_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^\pi \sin^{2\alpha} t\,\cos(z\,\cos t)\,\mathrm{d}t,$$

$$J_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\alpha-1/2}\cos zu\,\mathrm{d}u,$$

$$J_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{-1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\,\cos t}\sin^{2\alpha} t\,\mathrm{d}t,$$

$$J_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\alpha-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zu}\,\mathrm{d}u,$$

$$J_\alpha(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha\theta - z\,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t - z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{d}t.$$

Si α est entier :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - z\,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

3.6.2 Propriétés des fonctions de Bessel

Formules de récurrence :

$$J_{\alpha+1} + J_{\alpha-1} = \frac{2\alpha J_\alpha}{z},$$

$$J_\alpha = \frac{z}{2\alpha}[J_{\alpha+1} + J_{\alpha-1}].$$

DÉRIVÉES :

$$J'_\alpha = \frac{J_{\alpha-1} - J_{\alpha+1}}{2} = \frac{\alpha J_\alpha}{z} - J_{\alpha+1} = J_{\alpha-1} - \frac{\alpha J_\alpha}{z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{\alpha+1} J_{\alpha+1}) = z^{\alpha+1} J_\alpha$$

$$z^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-\alpha} J_\alpha) + J_{\alpha+1} = 0 .$$

Valeurs de $J_{1/2}$, $J_{-1/2}$, $J_{3/2}$, etc.

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \qquad J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z ,$$

$$J_{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right) .$$

FONCTION GÉNÉRATRICE : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t^n J_n(z) = \mathrm{e}^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$, $\qquad n$ entier

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} J_{2n+1} = 0, \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{2n} = 1 ,$$

$$\int_0^x J_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 2J_{\alpha+1} + 2J_{\alpha+3} + \ldots = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{\alpha+2n+1} .$$

Si $\alpha = 0$: $\qquad \displaystyle\int_0^x J_0(x)\,\mathrm{d}x = 2J_1 + 2J_3 - \ldots + 2J_{n+1} + \ldots$

$$\int_0^x J_{1/2}(x)\,\mathrm{d}x = 2J_{3/2} + 2J_{7/2} + \ldots + J_{(4n+3)/2} + \ldots .$$

Intégrale de Fresnel :

$$\int_0^x \sin\frac{\pi x^2}{2}\,\mathrm{d}x = J_{3/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + J_{7/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots + J_{(4n+3)/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots$$

$$\int_0^x \cos\frac{\pi x^2}{2}\,\mathrm{d}x = J_{1/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + J_{5/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots + J_{(4n+1)/2}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) + \ldots .$$

3.6.3 Fonctions dérivant des fonctions de Bessel

1° FONCTION DE BESSEL MODIFIÉE I_α.

$$I_\alpha = \mathrm{i}^{-\alpha} J_\alpha(\mathrm{i}z) = \sum_0^\infty \frac{(z/2)^{2n+\alpha}}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

Formes diverses de la fonction I_α :

$$I_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}\int_0^\pi \sin^{2\alpha} t\,\mathrm{ch}\,(z\cos t)\,\mathrm{d}t$$

$$I_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}\int_0^\pi e^{\mathrm{i}z\cos t}\sin^{2\alpha} t\,\mathrm{d}t$$

$$I_\alpha(z) = \frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\alpha-1/2}\,e^{\pm zu}\,\mathrm{d}u$$

$$I_\alpha(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos t}\cos\alpha t\,\mathrm{d}t - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}\,t-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Si α entier, $\alpha = n$:

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-z\cos t}\cos nt\,\mathrm{d}t.$$

Équation différentielle d'origine : $y'' + \frac{1}{z}y' - \left(1 + \frac{\alpha^2}{z^2}\right)y = 0$.

Formules de récurrence :

$$I_\alpha(z) = I_{-\alpha}(z) \quad \text{si} \quad \alpha \text{ entier ;}$$

$$zI'_\alpha(z) = \alpha I_\alpha(z) + zI_{\alpha+1}(z) = zI_{\alpha-1} - \alpha I_\alpha \;;$$

$$I'_\alpha = I_{\alpha+1} + \frac{\alpha}{z} I_\alpha = I_{\alpha-1} - \frac{\alpha}{z} I_\alpha \;;$$

$$I'_\alpha = \frac{I_{\alpha+1} + I_{\alpha-1}}{2}.$$

2° FONCTION DE BESSEL MODIFIÉE K_α :

$$K_\alpha(z) = \frac{\pi[I_{-\alpha}(z) - I_{+\alpha}(z)]}{2\sin\alpha\pi} = \int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}\,\alpha t\,\mathrm{d}t,$$

$$K_\alpha(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\,\mathrm{ch}\,t - \alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Si $\alpha = 0$, $$K_0(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^\infty e^{-\frac{z}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^1 e^{-\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

3° FONCTIONS DE BESSSEL DE 2[e] ESPÈCE N_α :

$$\begin{cases} N_\alpha(z) = \dfrac{J_\alpha(z)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(z)}{\sin\pi\alpha}. \\[2ex] N_{-\alpha}(z) = \dfrac{J_\alpha z - J_{-\alpha}(z)\cos\alpha\pi}{\sin\pi\alpha}. \end{cases}$$

4° FONCTIONS H DE HANKEL :

$$\begin{cases} H_\alpha^{(1)}(z) = \dfrac{J_{-\alpha}(z) - J_\alpha e^{-\alpha i\pi}}{i\,\sin\alpha\pi} \\[2ex] H_\alpha^{(2)}(z) = \dfrac{J_\alpha(z)e^{i\alpha\pi} - J_{-\alpha}(z)}{i\,\sin\alpha\pi}. \end{cases}$$

QUELQUES FORMULES IMPORTANTES RELATIVES AUX FONCTIONS DE BESSEL.

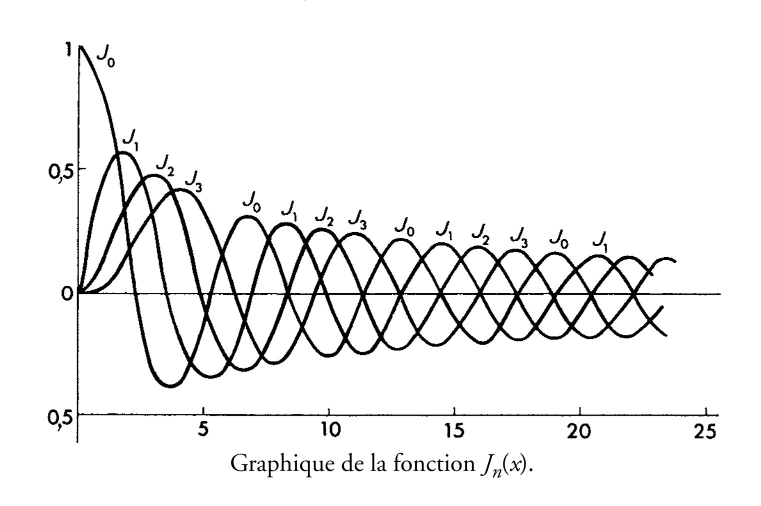
$$J_0\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\ \cos\alpha}\right) = J_0(x) \cdot J_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) \cdot J_n(y) \cos n\alpha\,,$$

$$\int_0^{2\pi} J_0\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\ \cos\alpha}\right)\,\mathrm{d}x = 2\pi J_0(x) J_0(y)\,.$$

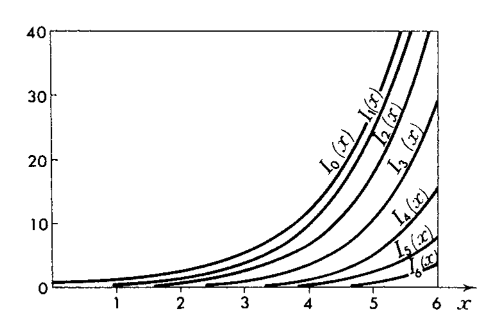
QUELQUES INTÉGRALES PARTICULIÈRES DES FONCTIONS DE BESSEL.

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_0(bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad a > 0$$

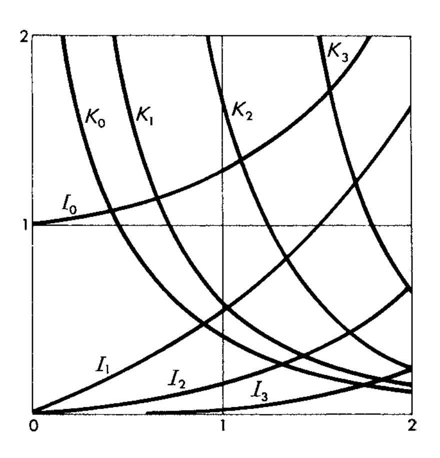
$$\int_0^{\infty} \frac{J_\alpha(x) \cdot J_\beta(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(\alpha^2 - \beta^2)} \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}\pi & \text{pour} \quad \alpha \neq \beta, \\ \dfrac{1}{2\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$



Graphique de la fonction $J_n(x)$.



Graphique de la fonction I_n.



Graphique des fonctions I_n et K_n.

RACINES DE $J'_n(z) = 0$.

Rang de la racine

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000 0	3,831 7	7,015 6	10,173 5	13,323 7	16,470 6	19,615 9	22,760 1	25,903 7
1	1,841 2	5,331 4	8,536 3	11,706 0	14,863 6	18,015 5	21,164 4	24,311 3	
2	3,054 2	6,706 1	9,969 5	13,170 4	16,347 5	19,512 9	22,672 1		
3	4,201 2	8,015 2	11,345 9	14,585 9	17,788 8	20,972 4	24,146 9		
4	5,317 5	9,282 4	12,681 9	15,964 1	19,196 0	22,401 0			
5	6,415 6	10,519 9	13,987 2	17,312 8	20,575 5	23,803 3			
6	7,501 3	11,734 9	15,268 2	18,637 4	21,931 8				
7	8,577 8	12,932 4	16,529 4	19,941 9	23,268 1				
8	9,647 4	14,115 6	17,774 0	21,229 1	24,587 2				
9	10,711 4	15,286 8	19,004 5	22,501 4					
10	11,770 9	16,447 9	20,223 0	23,760 8					

RACINES DE $J_n(z) = 0$.

Rang de la racine

n	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2,404 83	5,520 08	8,653 73	11,791 53	14,930 92	18,071 06	21,211 64	24,352 47
1	3,831 71	7,015 59	10,173 47	13,323 69	16,470 63	19,615 86	22,760 08	
2	5,135 62	8,417 24	11,619 84	14,795 95	17,959 82	21,117 00	24,271 12	
3	6,380 16	9,761 02	13,015 20	16,223 47	19,409 42	22,582 73		
4	7,588 34	11,064 71	14,372 54	17,616 0	20,826 9	24,199 0		
5	8,771 42	12,338 60	15,700 17	18,980 1	22,217 8			
6	9,936 11	13,589 29	17,003 8	20,320 8	23,586 1			
7	11,086 37	14,821 27	18,287 6	21,641 6	24,934 9			
8	12,225 09	16,037 8	19,554 5	22,945 2				
9	13,354 30	17,241 2	20,807 0	24,233 9				
10	14,475 50	18,433 5	22,047 0					

3.7 Fonctions de Kelvin

Solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(i + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0 .$$

FONCTIONS D'ORDRE 0. – Définition : Ber x + i Bei $x = J_0(x\,\mathrm{i}\,\sqrt{\mathrm{i}}) = I_0(x\sqrt{\mathrm{i}})$.
Développement en série :

$$\mathrm{Ber}\ x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{4r}}{[(2r)!]^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi r}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{(r)!^2} ,$$

$$\mathrm{Bei}\ x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{4r+2}}{[(2r+1)!]^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r+1} \frac{\sin\frac{\pi r}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{(r)!^2}$$

FONCTIONS D'ORDRE QUELCONQUE :

$$\mathrm{Ber}_\alpha(x) + \mathrm{i}\ \mathrm{Bei}_\alpha(x) = J_\alpha(\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}x}) = J_\alpha(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}x) ,$$

$$\mathrm{Ber}_\alpha(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\cos\left[\left(\frac{3}{2}\alpha - r\right)\frac{\pi}{2}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2r}}{r!\ \Gamma(\alpha + r + 1)} ,$$

$$\mathrm{Bei}_\alpha(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \sin\left[\left(\frac{3}{2}\alpha - r\right)\frac{\pi}{2}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2r}}{r!\ \Gamma(\alpha + r + 1)} ,$$

Formules dans le cas de α entier :

$$\mathrm{ber}_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha \mathrm{ber}_\alpha(x) ,$$

$$\mathrm{bei}_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha \mathrm{bei}_\alpha(x) ,$$

$$\mathrm{ber}_\alpha(-x) = (-1)^\alpha \mathrm{ber}_\alpha(x) ,$$

$$\mathrm{bei}_\alpha(-x) = (-1)^\alpha \mathrm{bei}_\alpha(x) ,$$

$$\begin{cases} \text{ber}_\alpha(-x) = \cos\alpha\pi \ \text{ber}_\alpha x - \sin\alpha\pi \ \text{bei}_\alpha(x), \\ \text{bei}_\alpha(-x) = \cos\alpha\pi \ \text{bei}_\alpha x - \sin\alpha\pi \ \text{ber}_\alpha(x). \end{cases}$$

3.8 Série et polynômes de Legendre

Découlent de l'équation différentielle :

$$(1-z^2)y'' - 2zy' + k(k+1)y = 0 .$$

Dérivent de la série hypergéométrique en faisant :

$$\alpha = k+1, \quad \beta = -k, \quad \gamma = -1, \quad x = \frac{1-z}{2},$$

Intégrale générale de l'équation de Legendre :

$$A\left[1 - \frac{k(k+1)}{2\,!}z^2 + \frac{k(k-2)(k+1)(k+3)}{4\,!}z^4 + \ldots\right]$$

$$+ B_z\left[1 - \frac{(k-1)(k+2)}{3\,!}z^2 + \frac{(k-1)(k+2)(k-3)(k+4)}{5\,!}z^4 + \ldots\right], |z| < 1.$$

Si k est entier cette expression se réduit à des polynômes.

Si $B = 0$ et $k = 2$, on a $A(1 - 3z^2)$;

$$k = 4, \quad \text{on a } A\left(1 - 10z^2 + \frac{35}{4}z^4\right).$$

Si $A = 0$ et $k = 1$, on a Bz ;

$$k = 3, \quad \text{on a } Bz\left(1 - \frac{5}{3}z^2\right).$$

Définition et expression générale des polynômes de Legendre :

$$P_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n\,!}\left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}z^{n-4} + \ldots\right],$$

ce qui donne :

$$P_1 = z\,, \qquad P_3 = \frac{5}{2}z^3 - \frac{3z}{2}\,,$$

$$P_2 = \frac{3z^2 - 1}{2}\,, \qquad P_4 = \frac{35z^4}{8} - \frac{15}{4}z^2 + \frac{3}{8}\,.$$

PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES DE LEGENDRE :

Formule d'Olinde Rodrigues : un polynôme d'ordre n de Legendre peut se mettre sous la forme :

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2 - 1)^n\,.$$

Fonction génératrice : $\varphi(\rho, z) = (1 - 2\rho z + \rho^2)^{-1/2}$.

Les termes $n!\,P_n(z)$ sont les coefficients du développement en série de Mac Laurin de φ (en ρ).

Formules de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)zP_n + nP_{n-1} = 0\,,$$

$$nP_n = zP'_n - P'_{n-1}\,,$$

$$P'_{n+1} - zP'_n - (n+1)P_n = 0$$

Zéros des polynômes. Racines de $P_n = 0$.
Elles sont toutes réelles, distinctes et comprises entre -1 et $+1$.

Orthogonalité :

$$\int_{-1}^{+1} P_i(z)P_k(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k\,;$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_k(z)]^2 = \frac{2}{2k+1} \quad \text{si} \quad i = k\,.$$

3.9 Fonction de Weber-Hermite

Solutions particulières de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)y = 0\,, \qquad n \text{ quelconque réel.}$$

Si l'on pose $y = e^{-z^2/4}\,u$ l'équation différentielle devient

$$\frac{d^2u}{dz^2} - z\frac{du}{dz} + nu = 0\,.$$

Développement en série :

$$y = e^{-z^2/4}\left\{a_0\left[1 + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\,\frac{n(n-2)\ldots(n-2p+2)}{(2p)\,!}\,z^{2p}\right]\right.$$

$$\left. + a_1 z\left[1 + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2p+1)}{(2p+1)\,!}\,z^{2p}\right]\right\}.$$

a_0 et a_1, quelconques.
Fonction de Weber-Hermite, D_n. On pose

$$a_0 = 2^{n/2}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad a_1 = -2^{(n/2)+(1/2)}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)}\,.$$

Formules de récurrence :

$$D_{n+1}(z) - zD_n(z) + nD_{n-1}(z) = 0\ ;$$

$$2D_n'(z) + zD_n(z) - 2nD_{n-1}(z) = 0\ ;$$

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[e^{+z^2/4}D_n(z)\right] = n(n-1)\ldots(n-m+1)e^{+z^2/4}D_{n-m}(z)\,, \quad n > m\,;$$

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[e^{-z^2/4}D_n(z)\right] = (-1)^m e^{+z^2/4}D_{n+m}(z)\,.$$

POLYNÔMES D'HERMITE. — Quand n entier, le développement s'arrête.
Si n pair positif : 2 p_1, $a_1 = 0$, et le développement s'arrête au terme en z^{2p}.
Si n impair : 2 $p + 1$, $a_0 = 0$, et le deuxième terme s'arrête au terme en z^{2p+1}.

En général : $D_n(z) = \mathrm{e}^{-z^2/4} H_n(z)$; H_n, polynôme de degré n.
Formule générale de $H_n(z)$:

$$z^n - \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} z^{n-4} + \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{2.4.2p\,!} z^{n-2p} + \ldots$$

Fonctions génératrices :

Polynômes d'Hermite :

$$\mathrm{e}^{zt - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n\,!} .$$

Fonction de Weber-Hermite, n entier :

$$\mathrm{e}^{-z^2/4 + zt - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(z) \frac{t^n}{n\,!} .$$

Orthogonalité :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} D_n(z) D_m(z)\, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} H_n(z) H_m(z)\, \mathrm{d}z = 0 \text{ si } m \neq n .$$

$$I = n\,! \sqrt{2\pi} \quad \text{si} \quad n = m .$$

FORMULES RELATIVES AUX POLYNÔMES D'HERMITE :

$$H_n(z) = (-1)^n \mathrm{e}^{+z^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \mathrm{e}^{-z^2/2} ,$$

$$H_{n+2}(z) - z H_{n+1}(z) + (n+1) H_n(z) = 0 ,$$

$$H'_{n+1}(z) = (n+1) H_n(z) ,$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = z , \quad H_2 = z^2 - 1, \quad H_3 = z^3 - 3z ,$$

$$H_4 = z^4 - 6z^2 + 3, \quad H_5 = z^5 - 10z^3 + 15z ,$$

$$H_6 = z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15\,,$$

$$H_7 = z^7 - 21z^5 + 105z^3 - 105z\,,$$

$$H_8 = z^8 - 28z^6 + 210z^4 - 420z^2 + 105\,,$$

$$H_9 = z^9 - 36z^7 + 378z^5 - 1260z^3 + 945z\,,$$

$$H_{10} = z^{10} - 45z^8 + 630z^6 - 3150z^4 + 4725z^2 - 945\,,$$

$$H_{11} = z^{11} - 55z^9 + 990z^7 - 6930z^5 + 17325\ z^3 - 10395z,$$

$$H_{12} = z^{12} - 66z^{10} + 1485z^8 - 13860z^6 + 51975z^4 - 62370z^2 + 10395\,.$$

3.10 Polynômes de Tchebycheff

Solutions de l'équation différentielle :

$$(1-\omega^2)\frac{d^2y}{d\omega^2} - \omega\frac{dy}{d\omega} + n^2y = 0\,.$$

Solutions indépendantes :

$$\left.\begin{array}{l} T_n(\omega) = \cos(n \operatorname{arc} \cos\omega) \\ U_n(\omega) = \sin(n \operatorname{arc} \cos\omega) \end{array}\right\}|\omega| < 1 \;;$$

$$\left.\begin{array}{l} T_n(\omega) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arg} \operatorname{ch}\ \omega) \\ U_n(\omega) = \operatorname{sh}(n \operatorname{arg} \operatorname{ch}\ \omega) \end{array}\right\}|\omega| > 1 \;;$$

$$T_n(\omega) = \frac{1}{2}\left[(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})^n + (\omega - \sqrt{\omega^2 - 1})^n\right].$$

Développement du polynôme :

$$T_n(\omega) = 2^{n-1}\left[\omega^n - \frac{n}{1!\,2^2}\omega^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!\,2^4}\omega^{n-4} + \ldots\right].$$

$$\text{Dernier terme : } \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2k-1}} & \text{si} \quad n = 2k\,, \\ \dfrac{(2k+1)\omega}{2^{2k}} & \text{si} \quad n = 2k+1\,. \end{cases}$$

$$U_n(\omega) = \pm\sqrt{1-\omega^2}\,p_n \quad \text{si} \quad |\omega| < 1$$
$$= \pm\sqrt{\omega^2-1}\,p_n \quad \text{si} \quad |\omega| > 1\,,$$

avec :

$$p_n = 2^{n-1}\left[\omega^{n-1} - \frac{n-2}{2^2 1\,!}\omega^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2^4 2\,!}\omega^{n-5} + \dots\right].$$

$$\text{Dernier terme : } \begin{cases} \dfrac{2k}{2^{2k-1}}\omega & \text{si} \quad n = 2k\,, \\ \dfrac{1}{2^{2k}} & \text{si} \quad n = 2k+1\,. \end{cases}$$

Zéros des polynômes. — Les zéros des polynômes T sont réels et compris entre –1 et +1. Le zéro de rang r est donné par la formule

$$\omega_r = \cos(2r-1)\frac{\pi}{2n}\,\cdot$$

Les zéros de U sont donnés par la formule $\omega_r = \cos\dfrac{r\pi}{n}\,\cdot$

Expression par dérivées :

$$T_n(\omega) = \frac{(-1)^{n-1}}{1.3.5\ (2n-1)}\sqrt{1-\omega^2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}(1-\omega^2)^{n-1/2}$$

$$U_n(\omega) = \frac{n(-1)^{n-1}}{1.3.5\ (2n-1)}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\omega^{n-1}}(1-\omega^2)^{n-1/2}.$$

FORMULES DE RÉCURRENCE OU ADDITIVES :

$$T_{m+n}(\omega) = T_m(\omega)\,T_n(\omega) - U_m(\omega)\,U_n(\omega)\,,$$

$$U_{m+n}(\omega) = U_m(\omega)\,T_n(\omega) + U_n(\omega)\,T_m(\omega)\,,$$

$$T_{m-n}(\omega) = T_n(\omega)\,T_m(\omega) + U_n(\omega)\,U_m(\omega)\,,$$

$$U_{m-n}(\omega) = U_m(\omega)\,T_n(\omega) - U_n(\omega)\,T_m(\omega)\,,$$

$$T_{m+1}(\omega) - 2\omega\,T_m(\omega) + T_{m-1}(\omega) = 0\,,$$

$$T_{m+1}(\omega) - 2\omega\,T_m(\omega) + T_{m-1}(\omega) = 0\,,$$

$$T_n[T_m(\omega)] = T_m[T_n(\omega)] = \cos(nm \text{ arc } \cos\omega) = T_{mn}(\omega)\,,$$

$$2\,T_n^2(\omega) = 1 + T_{2n}(\omega)\,.$$

FONCTIONS GÉNÉRATRICES :

$$I\begin{cases} \dfrac{1 - t\omega}{1 + t^2 - 2t\omega} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n\ t_n(\omega), \\[2ex] \dfrac{t\sqrt{1-\omega^2}}{1 + t^2 - 2t\omega} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^n\ U_n(\omega), \end{cases}$$

$$e^{t\omega}\cos(t\sqrt{1-\omega^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!}\ t_n(\omega),$$

$$e^{t\omega}\sin(t\sqrt{1-\omega^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!}\ U_n(\omega).$$

PREMIERS POLYNÔMES :

$T_0(\omega) = 1$ $\quad p_0(\omega) = 0$

$T_1(\omega) = \omega$ $\quad p_1(\omega) = 1$

$T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$ $\quad p_2(\omega) = 2\omega$

$$T_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega \qquad p_3(\omega) = 4\omega^2 - 1$$

$$T_4(\omega) = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1 \qquad p_4(\omega) = 8\omega^3 - 4\omega$$

$$T_5(\omega) = 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega \qquad p_5(\omega) = 16\omega^4 - 12\omega^2 + 1$$

$$T_6(\omega) = 32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1 \qquad p_6(\omega) = 32\omega^5 - 32\omega^3 + 6\omega$$

$$T_7(\omega) = 64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega \qquad p_7(\omega) = 64\omega^6 - 80\omega^4 + 24\omega^2 - 1$$

$$T_8(\omega) = 128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1 \qquad p_8(\omega) = 128\omega^7 - 192\omega^5 + 80\omega^3 - 8\omega$$

3.11 Polynômes de Laguerre

Solutions de l'équation différentielle :

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0 .$$

Forme générale :

$$\sum_{r=0}^{n} C_{n+\alpha}^{n-r} \frac{(-x)^r}{r!} = L_n^{(\alpha)} x$$

Si $\alpha = 0$, $\quad L_n(x) = 1 - C_n^1 x + C_n^2 \frac{x^2}{2!} - C_n^3 \frac{x^3}{3!} + \dots .$

Relation de récurrence :

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(x) .$$

Fonctions génératrices :

150

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n ,$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}) .$$

Orthogonalité :

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx = \Gamma(1+\alpha) C_{n+\alpha}^n \delta_{m,n} \;;$$

$\delta_{m,n}$ = symbole de Kronecker.

3.12 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit *f*, une fonction définie sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'on connaît les images de $n+1$points $x_0, \ldots, x_n$, de l'intervalle $[a,b]$ par *f*, c'est-à-dire $f(x_0), \ldots, f(x_n)$.
Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(x_i) = f(x_i)$ pour i, entier compris entre 0 et n. Ce polynôme est défini par :

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + \ldots + f(x_n)L(x_n),$$

où L_i est le produit des termes $\dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$ pour k variant de 0 à n, mais avec $k \neq i$. Mathématiquement, cela s'écrit $L_i(x) = \prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$.

P est appelé *polynôme d'interpolation de Lagrange* de la fonction f aux points $x_0, \ldots, x_n$.
On a d'ailleurs le résultat d'estimation de l'erreur faite en approximant l'application f par son polynôme d'interpolation P sur le segment $[a,b]$, si f est supposée $n+1$ fois dérivable, avec $f^{(n+1)}$ continue sur $[a,b]$:

$$\left|f(x) - P(x)\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\ldots(x-x_n)\right|,$$

où M_{n+1} est la valeur maximale de $f^{(n+1)}$ sur l'intervalle $[a,b]$.

4 • ALGÈBRE DES TRANSFORMATIONS

4.1 Transformation de Laplace

Nous ne donnerons pas ici, les origines, ni les utilisations (voir au calcul des intégrales définies et aux équations différentielles, les utilisations mathématiques de la transformation de Laplace) de la transformation de Laplace ; nous nous bornerons à indiquer les méthodes de calcul, les propriétés de ladite transformation ainsi que les transformées d'un certain nombre de fonctions.

DÉFINITION.— C'est l'intégrale

$$F(p) = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}\,dt,$$

étant une fonction de la variable réelle t, p une variable complexe ou non, étant toujours supposée nulle lorsque $t < 0$.

Symbolisme. — $F(p) \subset h(t)$ signifie $F(p) = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}\,dt$ et $h(t) \supset F(p)$ de même. On énonce que F est la transformée ou l'image de h et h est l'original de F.

Conditions d'existence. — Il faut que l'intégrale soit convergente, ce qui implique $e^{-\alpha t}|h(t)| \to$ limite finie.

Si h n'est pas nulle quand $t < 0$, on suppose toujours que h est multipliée par une fonction dite fonction unité ou échelon unité, telle que = 0 quand $t < 0$ et = 1 quand $t > 0$.

Propriétés de la transformation de Laplace (nous supposerons que les fonctions h remplissent les conditions ci-dessus).

1° $h_1 + h_2 \supset F_1 + F_2$; $ah(t) \supset aF(p)$.

2° Transformée d'une constante a : $h(t) = a$, $F(p) = \dfrac{a}{p}$.

3° Transformées des puissances de t : $h(t) = t^n$.

a) n entier : $F(p) = \dfrac{n\,!}{p^{n+1}}$;

b) n quelconque réel : $h(t) = t^{\alpha}$, $\quad F(p) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, $\quad \alpha > -1$.

4° Transformée de $e^{-\alpha t}$: $\quad e^{-\alpha t} \supset \dfrac{1}{p+\alpha}$.

5° Transformées des dérivées de h :

$h'(t) \supset pF(p) - h(0)$;

$h(0)$ = valeur que prend $h(t)$ quand $t \to 0$ par valeurs positives ;

$\dfrac{d^2 h}{dt^2} \supset p^2 F(p) - ph(0) - h'(0)$;

$\dfrac{d^n h}{dt^n} \supset p^n F(p) - p^{n-1} h(0) - p^{n-2} h'(0) \ldots - h^{(n-1)}(0)$.

6° Transformée de $\int h(t)$ entre 0 et t : $\int_0^t h(t)\,dt \supset \dfrac{1}{p} F(p)$,

$$p \mapsto F(p) \text{ étant la transformée de } t \mapsto h(t) .$$

7° Dérivation par rapport à p :

$$F'(p) \subset -th(t) \qquad \text{ou} \qquad th(t) \supset -F'(p) ,$$

$$\frac{d^n F}{dp^n} \subset (-1)^n t^n \, h(t) .$$

8° Intégration par rapport à p :

$$\int_p^{\infty} F(p)\,dp = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{h(t)}{t}\,dt \qquad \text{ou} \qquad \frac{h(t)}{t} \supset \int_p^{\infty} F(p)\,dp$$

$$\int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} dp \ldots \int_p^{\infty} F(p)\,dp \subset \frac{h(t)}{t^n} .$$

9° Translation de la variable t :

$$h(t-\lambda) \supset e^{-\lambda p} F(p) .$$

10° Translation de la variable p :

$$F(p+\lambda) \subset e^{-\lambda t} h(t) .$$

11° Changement d'échelle :

$$h(Kt) \supset \frac{1}{K} F\left(\frac{p}{K}\right) \qquad \text{ou} \qquad Kh(Kt) \supset F\left(\frac{p}{K}\right).$$

12° Théorème du produit, ou *théorème de Borel* :

$$F_1 F_2 \subset \int_0^t h_1(\lambda) h_2(t-\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^t h_2(\lambda) h_1(t-\lambda)\, \mathrm{d}\lambda .$$

13° Transformées de $th(t)$ et $\frac{h(t)}{t}$ (voir 7° et 8°) :

$$th(t) \supset -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}, \qquad \frac{h(t)}{t} \supset \int_p^\infty F(p)\, \mathrm{d}p .$$

14° $\int_0^\infty F(p)\, \mathrm{d}p = \int_0^\infty \frac{h(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ (c'est une égalité ici) .

15° $\int_0^\infty \frac{h(t)}{t}\, \mathrm{d}t \supset \frac{1}{p} \int_0^\infty F(p)\, \mathrm{d}p .$

16° $\int_t^\infty \frac{h(t)}{t}\, \mathrm{d}t \supset \frac{1}{p} \int_0^p F(p)\, \mathrm{d}p .$

17° Transformées de $t^n\, h(t)$ et des dérivées successives de h. Multipliées par les puissances (entières) de t (F image de h) :

$$t^n h(t) \supset (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n},$$

$$t \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \supset -p\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} - F,$$

$$t^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \supset p \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}p^2} + 2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p},$$

$$t \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} \supset h(0) - 2\, pF - p^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p},$$

$$t^2 \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} \supset p^2\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}p^2} + 4p \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} + 2F.$$

18° Transformée de $h(t^2)$:

$$h(t^2) \supset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} F(x^2) e^{-p^2/4x^2}\, dx, \qquad F = \text{image de } h.$$

19° Transformée de $h(\mathrm{sh}\, t)$:

$$h(\mathrm{sh}\, t) \supset \int_0^{\infty} J_p(u) F(u)\, du, \qquad J_p = \text{fonction } J \text{ de Bessel},$$

F = image de h.

20° Transformée de $t^{\alpha-1} h\left(\frac{1}{t}\right)$:

$$t^{\alpha-1} h\left(\frac{1}{t}\right) \supset \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{p}\right)^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{tp}) F(t)\, dt, \qquad J = \text{fonction de Bessel.}$$

D'où, pour $\alpha = 1$: $$h\left(\frac{1}{t}\right) \supset \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{p}\right)^{1/2} J_1(2\sqrt{tp}) F(t)\, dt,$$

$\alpha = 0$: $$\frac{1}{t} h\left(\frac{1}{t}\right) \supset \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{tp}) F(t)\, dt,$$

$\alpha = 2$: $$t h\left(\frac{1}{t}\right) \supset \int_0^{\infty} \frac{t}{p} J_2(2\sqrt{tp}) F(t)\, dt,$$

$\alpha = \frac{1}{2}$: $$\frac{1}{\sqrt{t}} h\left(\frac{1}{t}\right) \supset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{\sqrt{p}} \sin(2\sqrt{tp})\, dt,$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$: $$\frac{1}{t\sqrt{t}} h\left(\frac{1}{t}\right) \supset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{\sqrt{t}} \cos(2\sqrt{tp})\, dt.$$

21° Original de $$\frac{1}{p^{n+1}} F\left(\frac{1}{p}\right) \subset \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{tu}) h(u)\, du.$$

D'où, pour $n = 0$: $$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \subset \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{tu}) h(u)\, du$$

$n = 1$: $$\frac{1}{p^2} F\left(\frac{1}{p}\right) \subset \sqrt{t} \int_0^{\infty} \frac{J_1(2\sqrt{tu})}{\sqrt{u}} h(u)\, du$$

$$n = \frac{1}{2} \; : \qquad \frac{1}{p\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right) \subset \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^{1/4} J_{1/2}\,(2\sqrt{tu})\,h(u)\;\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) \sin(2\sqrt{tu})\,h(u)\;\mathrm{d}u$$

$$n = -\frac{1}{2} \; : \qquad \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(2\sqrt{tu})\,h(u)\;\mathrm{d}u\,.$$

22° Original de $F(\sqrt{p}) \subset \dfrac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^{\infty} u\;\mathrm{e}^{-u^2/4t} h(u)\;\mathrm{d}u\,.$

23° Original de $\dfrac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \subset \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\;\mathrm{e}^{-u^2/4t} h(u)\;\mathrm{d}u\,.$

24° Original de $F(\ln p) \subset \displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{t^{u-1}}{\Gamma(u)}\right) h(u)\;\mathrm{d}u\,.$

4.1.1 Tableau des transformées d'un certain nombre de fonctions

FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

$h(t)$	$F(p)$
Constante a	$\dfrac{a}{p}$
1	$\dfrac{1}{p}$
$\Upsilon(t)$: fonction unité	$\dfrac{1}{p}$
$\Upsilon'(t)$: fonction de Dirac	1
$\Upsilon''(t)$	p
$\Upsilon'''(t)$	p^2
$\dfrac{t^{x-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\quad \alpha > -1$	$\dfrac{1}{p^{\alpha}}$

$h(t)$	$F(p)$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$
$t\sqrt{t}$	$\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4p^2\sqrt{p}}$
$\sqrt[3]{t}$	$\dfrac{\Gamma(4/3)}{p\sqrt[3]{p}}$
$\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$	$-2\sqrt{p\pi}$
$\dfrac{1}{1+t}$	$-e^{p}\ \mathrm{Ei}(-p) = e^{-p}\displaystyle\int_{-\infty}^{(-p)} \frac{e^x}{x}\,dx$
$\dfrac{1}{1-t}$	$e^{-p}\ \mathrm{Ei}(-p)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\ e^{p}[1-\Phi(\sqrt{p})]$, Φ = fonction erreur
$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\sin p\ \mathrm{Ci}(p) + \cos p\left[\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(p)\right]$
$\dfrac{t}{1+t^2}$	$\sin p\left[\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(p)\right] - \cos p\ \mathrm{Ci}(p)$
$\dfrac{t}{t^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\left\{\sin ap\left[\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(ap)\right] - \cos ap\ \mathrm{Ci}(ap)\right\}$
$\dfrac{At+B}{t^2+a^2}$	$\mathrm{Ci}(ap)[B\sin(ap) - A\cos(ap)]$ $+\left[\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(ap)\right][A\sin(ap) + B\cos(ap)]$

$h(t)$	$F(p)$
$\frac{1}{\alpha}\sqrt{t(t+2\alpha)}$	$\frac{e^{\alpha p}}{p}K_1(\alpha p)$, K_1 = fonction K de Bessel
$\frac{t+\alpha}{\alpha\sqrt{t(t+2\alpha)}}$	$e^{\alpha p}K_1(\alpha p)$
$\frac{t}{\alpha\sqrt{t^2-\alpha^2}}$	$K_1(\alpha p)$
$\sqrt{t^2-\alpha^2}$	$\frac{\alpha K_1(\alpha p)}{p}$

FONCTIONS CIRCULAIRES ET HYPERBOLIQUES

$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\mathrm{ch}\ \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\mathrm{sh}\ \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\mathrm{sh}\ \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$

$e^{-\alpha t}\ \mathrm{ch}\ \omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$
$t\sin\ \omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\ \omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\ \mathrm{sh}\ \omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\ \mathrm{ch}\ \omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
$\dfrac{\sin\ \omega t+\omega t\cos\ \omega t}{2\omega}$	$\dfrac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\dfrac{\sin\ \omega t-\omega t\cos\ \omega t}{2\omega^3}$	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\dfrac{\sin\ \omega t}{t}$	$\mathrm{arc\ cotan}\ \dfrac{p}{\omega}=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arc\ tan}\ \dfrac{p}{\omega}=\mathrm{arc\ tan}\ \dfrac{\omega}{p}$
$\dfrac{1-\ \cos\ \omega t}{t}$	$\ln\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}}{p}$
$\dfrac{1-\mathrm{ch}\ \omega t}{t}$	$\ln\dfrac{\sqrt{p^2-\omega^2}}{p}$
$\sin^2\ \omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
$\cos^2\ \omega t$	$\dfrac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)^2}$
$\cos\ \omega t\ \sin\ \omega t=\dfrac{1}{2}\sin\ 2\ \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+4\omega^2}$

$\cos \omega t \sin^2 \omega t$	$\dfrac{2\omega^2 p}{(p^2+\omega^2)(p^2+9\omega^2)}$
$\sin^3 \omega t$	$\dfrac{6\omega^3}{(p^2+\omega^2)(p^2+9\omega^2)}$
$\dfrac{\cos \alpha t}{t\sqrt{t}}$	$-\sqrt{2\pi}\left(p+\sqrt{p^2+\alpha^2}\right)^{1/2}$
$\sqrt{t}\ \cos \alpha t$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{4} - \dfrac{p^2-\alpha^2+p\sqrt{p^2+\alpha^2}}{(p^2+\alpha^2)\sqrt{p^2+\alpha^2}\sqrt{\dfrac{p+\sqrt{p^2+\alpha^2}}{2}}}$
$\dfrac{\sin \alpha t \sin \omega t}{t}$	$\dfrac{1}{4}\ln \dfrac{p^2+(\alpha+\omega)^2}{p^2+(\alpha-\omega)^2}$
$\dfrac{\sin^2 \omega t}{t}$	$\dfrac{1}{4}\ln \dfrac{p^2+4\omega^2}{p^2}$
$\dfrac{\sin^2 \omega t}{t^2}$	$\omega \arctan \dfrac{2\omega}{p} - \dfrac{p}{4}\ln \dfrac{p^2+4\omega^2}{p^2}$
$\sin^{2n} \omega t$ (1)	$\dfrac{2n!\,\omega^{2n}}{p[p^2+(2\omega)^2][p^2+(4\omega)^2]\ldots[p^2+(2n\omega)^2]}$
$\sin^{2n+1} \omega t$	$\dfrac{(2n+1)!\ \omega^{2n+1}}{[p^2+\omega^2][p^2+(3\omega)^2]\ldots[p^2+(2n+1)^2\omega^2]}$
$\arctan t$	$\dfrac{1}{p}\left[\sin p \ \mathrm{Ci}\ p + \cos p\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\ p\right)\right]$
$\dfrac{\cos 2\sqrt{\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha/p}$

(1) La transformée de $\cos^{2n}\omega t$ se calcule de la même façon que celle de $\sin^{2n}\omega t$, c'est-à-dire en partant de $\sin^{2n-2}\omega t$, en multipliant par $\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}$ en appliquant la relation $\mathrm{e}^{-\alpha/p}\ \mathrm{h}(t) \supset F(p+\alpha)$.

$\sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi\alpha}}{p\sqrt{p}}\, e^{-\alpha/p}$
$\dfrac{1}{\pi t}\sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\Phi\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{p}}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{ch}\, 2\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\, e^{\alpha/p}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\,\mathrm{sh}\, 2\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}\, e^{\alpha/p}$

FONCTIONS EXPONENTIELLES

e^{t}	$\dfrac{1}{p-1}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$e^{-\alpha t^2/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}\, e^{p^2/2\alpha}\left[1-\Phi\left(\dfrac{p}{\sqrt{2\alpha}}\right)\right]$
$t\, e^{-\alpha t^2/2}$	$\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}\, p\, e^{p^2/2\alpha}\left[1-\Phi\left(\dfrac{p}{\sqrt{2\alpha}}\right)\right]$
$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\, e^{a/p}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\dfrac{a}{p}}\right)\right]$
$e^{-ae^{-t}}$	$\dfrac{\gamma(p, a)}{a^{p}}\ ;\ \gamma(\alpha, x)=\int_0^x e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$ = fonction Γ incomplète
$e^{-ae^{t}}$	$a^{p}\Gamma(-p, a)$, avec $\Gamma(\alpha, x)=\Gamma(\alpha)-\gamma(\alpha, x)$
$(1-e^{-t/a})^{\alpha-1}$	$aB(ap, \alpha)=\dfrac{a\Gamma(ap)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(ap+\alpha)}$

$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$	$\psi(p+a)-\psi(p)$, avec $\psi(p)=\dfrac{\mathrm{d}\ln\Gamma(p)}{\mathrm{d}p}$
$\dfrac{(1-\mathrm{e}^{-at})(1-\mathrm{e}^{-bt})}{1-\mathrm{e}^{-t}}$	$\psi(p+a)-\psi(p)-\psi(p+a+b)+\psi(p+b)$
$\dfrac{(1-\mathrm{e}^{-at})(1-\mathrm{e}^{-bt})}{t(1-\mathrm{e}^{-t})}$	$\ln\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(p+a+b)}{\Gamma(p+a)\Gamma(p+b)}$
$(1-\mathrm{e}^{-t})^{\alpha-1}(1-z\,\mathrm{e}^{-t})^{\beta}$	$B(p,\alpha)\ F(\beta,p,\alpha+p\ ;\ z)$ B = fonction eulérienne de première espèce F = fonction hypergéométrique
$\dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{\alpha^2/4t}$	$2K_0(\alpha\sqrt{p})$
$\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}$	$\dfrac{\alpha}{\sqrt{p}}K_1(\alpha\sqrt{p})$
$\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha t}-\mathrm{e}^{\beta t}}{t}$	$\ln\dfrac{p-\beta}{p-\alpha}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

Fonctions de sinus intégral et cosinus intégral

$\mathrm{Si}=\dfrac{\pi}{2}=-\displaystyle\int_t^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{\pi}{2p}-\dfrac{1}{p}\ \mathrm{arc\,tan}\ p$
$\displaystyle\int_t^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$	$\dfrac{1}{p}\ \mathrm{arc\,tan}\ p$
$\mathrm{Ci}=-\displaystyle\int_t^{\infty}\dfrac{\cos x}{x}$	$-\dfrac{1}{p}\ln\sqrt{p^2+1}$
$\displaystyle\int_t^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\,\mathrm{d}s$	$\dfrac{\ln(p+1)}{p}$

$\cos t \,\mathrm{Si}(t) - \sin t \,\mathrm{Ci}(t)$	$\dfrac{\pi p + 2\ln p}{2(p^2+1)}$
$\cos t \,\mathrm{si}(t) - \sin t \,\mathrm{Ci}(t)$ (avec $\mathrm{si} = \mathrm{Si}(t) - \pi/2$)	$\dfrac{\ln p}{p^2+1}$
$\sin t \,\mathrm{si}(t) + \cos t \,\mathrm{Ci}(t)$	$-\dfrac{p \ln p}{p^2+1}$

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

$\ln t$	$-\dfrac{\ln p + C}{p}$, C = constante d'Euler $= -\dfrac{\ln p\gamma}{p}$, $C = \ln\gamma$, $\gamma = e^C$
$\ln(1+at)$	$-p^{-1} e^{p/a}\,\mathrm{Ei}\left(-\dfrac{p}{a}\right)$
$\ln(1+b)$	$\dfrac{1}{p}[\ln b - e^{pb}\,\mathrm{Ei}(-pb)]$
$t^{\alpha-1}\ln t$	$\Gamma(\alpha)p^{-\alpha}[\psi(\alpha) - \ln p]$
$t \ln t$	$\dfrac{\psi(2) - \ln p}{p^2} = \dfrac{1 - \ln p\gamma}{p^2}$
$\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\,\ln p\gamma$
$\sqrt{t}\,\ln t$	$\dfrac{1}{2p}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}(2 - \ln p\gamma)$
$(\ln t)^2$	$\dfrac{1}{p}\left[\dfrac{\pi^2}{6} + (\ln p\gamma)^2\right]$

$\ln(t^2 + a^2)$	$\frac{2}{p}\left[\ln a + \sin ap\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(ap)\right) - \cos ap\ \mathrm{Ci}\,ap\right]$
$\frac{1}{t}\ln\frac{t^2 + a^2}{a^2} = \frac{1}{t}[\ln(t^2 + a^2) - \ln a^2]$	$-[(\mathrm{si}\ ap)^2 + (\mathrm{Ci}\ ap)^2]$

Fonctions eulériennes :

$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{a-1}\, \mathrm{d}t$	$\frac{\Gamma(a)}{p}[1 - (p+1)^{-a}]$
$\gamma(a, x) = \Gamma(a) - \Gamma(a, x)$	$\frac{\Gamma(a)}{p}(1 + p)^{-a}$

Fonctions Θ

$\Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1 - \mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}}{p}$
$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1 - \mathrm{e}^{-2\sqrt{p}}}{p}$
$\mathrm{e}^{t}\Theta(\sqrt{t})$	$\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$
$\mathrm{e}^{\alpha^2 t}\,\Theta(\alpha\sqrt{t})$	$\frac{\alpha}{\sqrt{p}(p - \alpha^2)}$
$\Theta(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$
$\mathrm{e}^{-t}\Theta(\sqrt{t})$	$\frac{1}{(p+1)\sqrt{p+2}}$
$\Theta\left(\frac{t}{2\alpha}\right)$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{\alpha^2 p^2}[1 - \Theta(\alpha p)], \quad \alpha > 0$

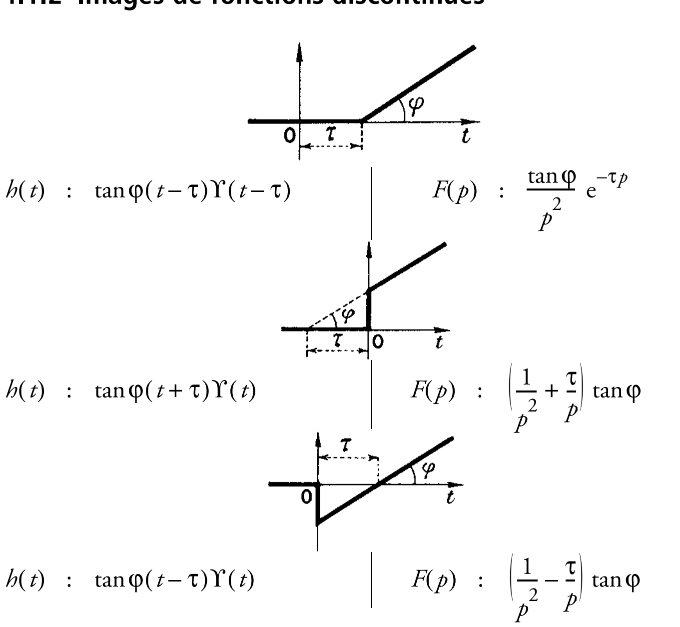
Fonctions de Bessel

$J_\alpha(t)$	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^\alpha}{\sqrt{p^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}\left(\sqrt{p^2+1}+p\right)^\alpha}$
$J_0(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_\alpha(at)$	$\dfrac{a^\alpha}{\sqrt{p^2+a^2}\left(p+\sqrt{p^2+a^2}\right)^\alpha}$ en posant $r = \sqrt{p^2+a^2}$ et $p/a = \operatorname{sh} u$, $J_\alpha(at) \supset r^{-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha u}$
$(\sqrt{tx})^\alpha J_\alpha(2\sqrt{tx})$	$\dfrac{x^\alpha}{p^{\alpha+1}}\,\mathrm{e}^{-x/p}$
$\left(\dfrac{t}{x}\right)^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{tx})$	$\dfrac{1}{p^{\alpha+1}}\,\mathrm{e}^{-x/p}$
$I_\alpha(at)$	$\dfrac{a^\alpha}{\sqrt{p^2-a^2}\left(p+\sqrt{p^2-a^2}\right)}$
$I_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}$
$\dfrac{I_\alpha(at)}{t}$	$\dfrac{a^\alpha}{\alpha\left(p+\sqrt{p^2-a^2}\right)^\alpha}$
$K_\alpha(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}\ln\dfrac{p+\sqrt{p^2-a^2}}{a}$

$Y_0(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[H_0^{(1)}(t) - H_0^{(2)}(t)\right]$ = fonction Y de Bessel	$-\frac{2}{\pi}\ln\left(p + \sqrt{p^2+1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_0\left(\sqrt{t^2+2at}\right)$	$\frac{\mathrm{e}^{a\left(p-\sqrt{p^2+1}\right)}}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_0\left(\sqrt{t^2-2at}\right)$	$\frac{\mathrm{e}^{a\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)}}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_0\left(\sqrt{t^2-a^2}\right)$	$\frac{\mathrm{e}^{-a\left(\sqrt{p^2+1}\right)}}{\sqrt{p^2+1}}$
$I_0\left(\sqrt{t^2+2at}\right)$	$\frac{\mathrm{e}^{a\left(p-\sqrt{p^2-1}\right)}}{\sqrt{p^2-1}}$
$I_0\left(\sqrt{t^2-a^2}\right)$	$\frac{\mathrm{e}^{-a\sqrt{p^2-1}}}{\sqrt{p^2-1}}$
$\frac{J_1\left(\sqrt{t^2+2at}\right)}{\sqrt{t^2+2at}}$	$\frac{1-\mathrm{e}^{ap-a\sqrt{p^2+1}}}{a}$
$\frac{J_1\left(\sqrt{t^2-a^2}\right)}{\sqrt{t^2-a^2}}$	$\frac{\mathrm{e}^{-ap}-\mathrm{e}^{-a\sqrt{p^2+1}}}{a}$
$\frac{I_1\left(\sqrt{t^2-a^2}\right)}{\sqrt{t^2-a^2}}$	$\frac{\mathrm{e}^{-a\sqrt{p^2-1}}-\mathrm{e}^{-ap}}{a}$
$\int_0^t J_0\left(\sqrt{t^2-u^2}\right) f(u)\,\mathrm{d}u$	$\frac{F\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2+1}}$, F image de f
$\left(\frac{\theta-a}{\theta+a}\right)^{\alpha/2} J_\alpha\sqrt{\theta^2-a^2}$	$\frac{\mathrm{e}^{-a\sqrt{p^2+1}}}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^\alpha$

en posant $\theta = t + a$	
$\left(\dfrac{\theta - a}{\theta + a}\right)^{\alpha/2} I_\alpha\left(\sqrt{\theta^2 - a^2}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{p^2-1}}}{\sqrt{p^2-1}}\left(p - \sqrt{p^2-1}\right)^\alpha$
$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{\alpha - 1/2} J_{\alpha - 1/2}(t)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^\alpha}$
$t^{1/2} J_{1/2}(t)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{p^2+1}$
$\mathrm{Ber}\ (2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$
$\mathrm{Bei}\ (2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p}\sin\dfrac{1}{p}$

4.1.2 Images de fonctions discontinues

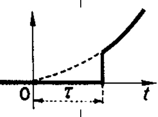


$h(t)\ :\ \tan\varphi(t - \tau)\Upsilon(t - \tau)$ | $F(p)\ :\ \dfrac{\tan\varphi}{p^2}\, e^{-\tau p}$

$h(t)\ :\ \tan\varphi(t + \tau)\Upsilon(t)$ | $F(p)\ :\ \left(\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{\tau}{p}\right)\tan\varphi$

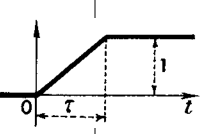
$h(t)\ :\ \tan\varphi(t - \tau)\Upsilon(t)$ | $F(p)\ :\ \left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{\tau}{p}\right)\tan\varphi$

$h(t)$: $\tan\varphi(t-\theta-\tau)\Upsilon(t-\theta)$ | $F(p)$: $\tan\varphi\left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{\tau}{p}\right)e^{-p\theta}$

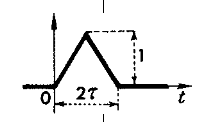


$h(t)$: $t^2\Upsilon(t-\tau)$ | $F(p)$: $\left(\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{2\tau}{p^2}+\dfrac{\tau^2}{p}\right)e^{-p\tau}$

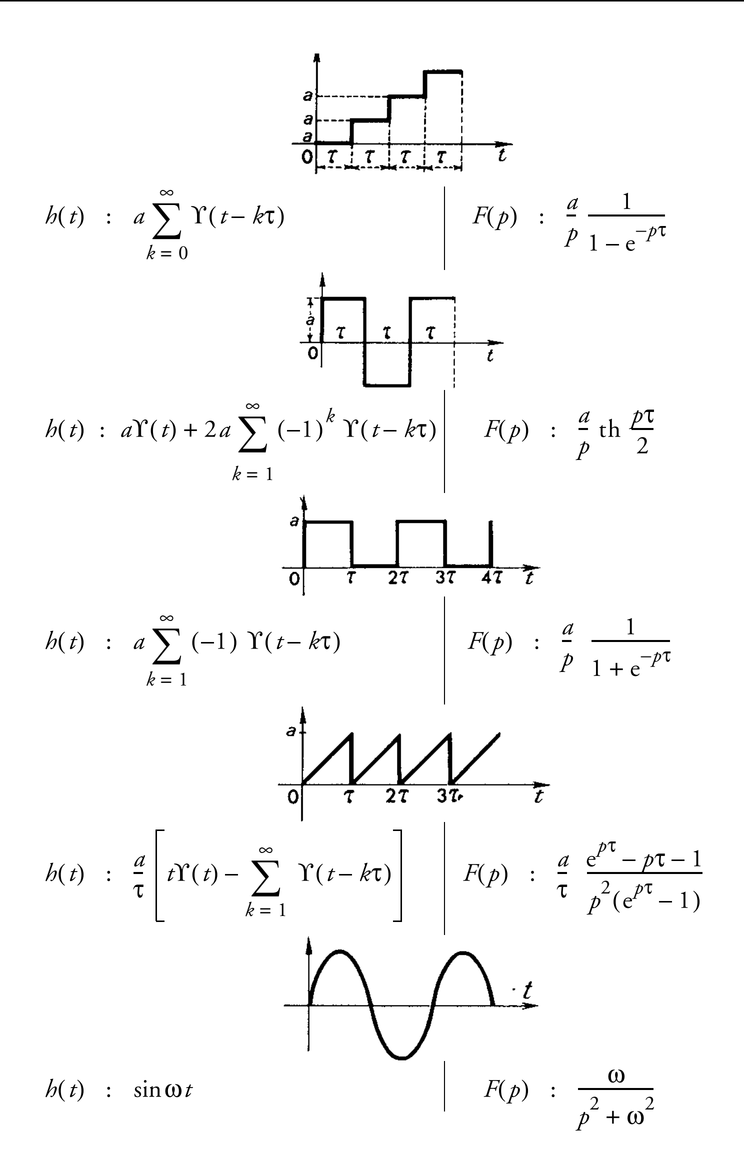
$h(t)$: $\Upsilon(t-a)-\Upsilon(t-b)$ | $F(p)$: $\dfrac{1}{p}(e^{-ap}-e^{-bp})$



$h(t)$: $\dfrac{1}{\tau}$ $\quad 0<t<\tau$; $\quad 1 \quad \tau<t<+\infty$ | $F(p)$: $\dfrac{1-e^{-p\tau}}{p^2\tau}$



$h(t)$: $\dfrac{1}{\tau}$ $\quad 0<t<\tau$; $\quad -\dfrac{t}{\tau}+2 \quad \tau<t<2\tau$; $\quad 0 \quad 2\tau<t<+\infty$ | $F(p)$: $\dfrac{(1-e^{-p\tau})^2}{p^2\tau}$



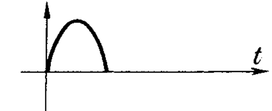
$h(t)\ :\ a\sum_{k=0}^{\infty}\Upsilon(t-k\tau)$ | $F(p)\ :\ \dfrac{a}{p}\,\dfrac{1}{1-e^{-p\tau}}$

$h(t)\ :\ a\Upsilon(t)+2a\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\,\Upsilon(t-k\tau)$ | $F(p)\ :\ \dfrac{a}{p}\,\mathrm{th}\,\dfrac{p\tau}{2}$

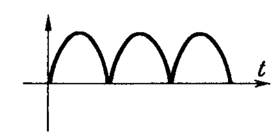
$h(t)\ :\ a\sum_{k=1}^{\infty}(-1)\ \Upsilon(t-k\tau)$ | $F(p)\ :\ \dfrac{a}{p}\,\dfrac{1}{1+e^{-p\tau}}$

$h(t)\ :\ \dfrac{a}{\tau}\left[t\Upsilon(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\Upsilon(t-k\tau)\right]$ | $F(p)\ :\ \dfrac{a}{\tau}\,\dfrac{e^{p\tau}-p\tau-1}{p^{2}(e^{p\tau}-1)}$

$h(t)\ :\ \sin\omega t$ | $F(p)\ :\ \dfrac{\omega}{p^{2}+\omega^{2}}$

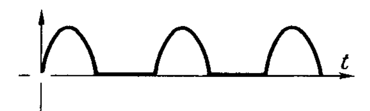


$h(t)$: première boucle $F(p)$: $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}p}\right)$



$h(t)$: arcs positifs de la sinusoïde

$$F(p) \ : \ \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1+e^{-\pi p/\omega}}{1-e^{-\pi p/\omega}} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\coth\frac{\pi p}{2\omega}$$



$h(t)$: arcs positifs séparés par un intervalle $F(p)$: $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{1-e^{-\pi p/\omega}}$

4.1.3 Recherche de l'original d'une fonction donnée F(p) de p

l° Consultation du catalogue.

2° Quand on peut mettre $F(p)$ sous la forme d'une somme de fonctions (par ex. fractions rationnelles) l'original est la somme des originaux des termes de la somme.

3° Quand on peut mettre la fonction sous la forme $p^{-1}\ G(p)$, l'original est $\int_0^1 h(t)\,dt$; $h(t)$ étant l'original de $G(p)$.

4° Application du théorème de Borel. Quand la fonction peut être mise sous la forme $F_1(p) \times F_2(p)$, l'original est :

$$\int_0^t h_2(t-\lambda)h_1(t)\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^t h_1(t-\lambda)h_2(t)\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

h_1 et h_2, étant les originaux de F_1 et F_2. Cette écriture intégrale porte le nom de « produit de convolution ».

5° Formule de Mellin-Fourier :

$$h(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{pt}F(p)\,\mathrm{d}p\,.$$

4.2 Transformation de Fourier

Définition.— Transformation qui, à une fonction f de la variable t respondre une autre fonction $F(f)$ telle que :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi st} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Propriétés de la transformation de Fourier.
Réciprocité.— On a :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi st}\,\mathrm{d}t$$

et

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi st}\,\mathrm{d}s\,.$$

THÉORÈME DE PARSEVAL :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |F|^2\,\mathrm{d}s\,.$$

Transposition : $t \mapsto f(\alpha t)$ a pour transformée $\dfrac{1}{|\alpha|}F\left(\dfrac{f}{\alpha}\right)$.

TRANSFORMÉES DE FOURIER À PLUSIEURS VARIABLES.

2 variables :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi(ux+vy)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Si $f(x, y) = \varphi(r)$, où $x^2 + y^2 = r^2$, en posant $u^2 + v^2 = \rho^2$:

$$\mathcal{F}(u, v) = \Phi(\rho) = \int_0^{+\infty} \varphi(r)\left(\int_0^{2\pi} e^{-2i\pi\rho r 193 \cos\theta} d\theta\right) r \, d$$

$$\Phi(\rho) = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} r\varphi(r) J_0(2\pi\rho r) \, dr.$$

cas n variables :

$$\Phi(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{(n-2)/2}} \int_0^{\infty} r^{n/2} J_{(n-2)/2}(2\pi\rho r)\varphi(r) \, dr.$$

Avec $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + r^2,\ u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + \rho^2$.

Formule d'inversion : $\varphi(r) = \dfrac{2\pi}{r^{(n-2)/2}} \displaystyle\int_0^{\infty} \rho^{n/2} J_{(n-2)/2}(2\pi\rho r)\Phi(\rho) \, d\rho$

$J_{(n-2)/2} =$ fonction de Bessel.

TRANSFORMÉES DE FOURIER DE FONCTIONS USUELLES

$f(t)$	$F(f)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{-\pi^2 f^2/\alpha}$
$\Upsilon(t)$: fonction unité	1
$\cos \alpha t^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[\cos\frac{\pi^2 f^2}{\alpha} - \frac{\pi}{4}\right]$
$\sin \alpha t^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[\cos\frac{\pi^2 f^2}{\alpha} + \frac{\pi}{4}\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a + 4\pi^2 f^2}$
$\frac{2a}{a + 4\pi^2 t^2}$	$e^{-a\lvert f\rvert}$
$\frac{1}{1 + t^2}$	$\pi\ e^{-2\pi\lvert f\rvert}$

4.3 Transformation de Mellin

Définition.— Transformation qui, à une fonction f de la variable réelle t fait correspondre une fonction φ de la variable $s = \sigma + i\omega$, telle que

$$\varphi(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\, dt.$$

4.3.1 Règles opératoires

φ étant la transformée de f, on a

$f(at)$ Transformée $M[f(at)] = a^{-s}\varphi(s)$

$t^\alpha f(t)$ $M[t^\alpha f(t)] = \varphi(\alpha + s)$

$f(t^\alpha)$ $M[f(t^\alpha)] = \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$ $M\left[\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right] = \varphi(1-s)$ sous réserve

$$t^{s-1} f(t) = 0 \quad \text{pour} \begin{cases} t = 0 \\ t = \infty \end{cases}$$

$f'(t)$ $M[f'(t)] = -(s-1)\varphi(s-1)$

$f^{(n)}(t)$ $M\left[f^{(n)}(t)\right] = (-1)^n (s-1)(s-2)\ldots(s-n)\varphi(s-n)$.

Formule d'inversion :

$$\varphi(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-s}\varphi(s)\, ds.$$

Formule du produit : f et g dont les transformées sont φ et ψ,

$$M(f \times g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \psi(u)\varphi(s-u)\, du.$$

Original de $\varphi(s)\psi(s) = \int_0^\infty f(vt)\, g\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{v}$.

4.3.2 Transformées de fonctions usuelles

$f = e^{-t}$	$M[f(t)] = \Gamma(s)$
$f = e^{1/t}$	$M = \Gamma(-s)$
$f = \dfrac{1}{1+t}$	$M = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$
$f = \dfrac{1}{(1+t)^{\alpha}}$	$M = B(s, \alpha - s)$
$f = \dfrac{1}{(1+t^n)^{\alpha}}$	$M = \dfrac{1}{n} B\left(\dfrac{s}{n}, \alpha - \dfrac{s}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{s}{n}\right)\Gamma\left(\alpha - \dfrac{s}{n}\right)}{\Gamma(\alpha)}$ si $\alpha = 1$, $M = \dfrac{1}{n}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{s}{n}\right)\Gamma\left(1 - \dfrac{s}{n}\right)}{\Gamma(\alpha)}$ $= \dfrac{\pi}{n \sin(\pi s/n)}$
$\cos t$	$\cos\dfrac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)$, avec $0 < \sigma < 1$
$\sin t$	$\sin\dfrac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)$, avec $0 < \sigma < 1$
$\dfrac{1}{t}\ln(1+t)$	$\dfrac{\pi}{(1-s)\sin \pi s}$
$\dfrac{1}{t} e^{-1/s}$	$\Gamma(1-s)$
$t^{\alpha} e^{-at}$	$a^{-(s+\alpha)}\Gamma(s+\alpha)$
$\dfrac{1}{e^t - 1}$	$\Gamma(s) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ $\sigma > 1$
e^{-t^2}	$\dfrac{1}{2}\,\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)$.

Transformées des fonctions de Bessel.

$x^{-\alpha} J_\alpha(x)$	$\dfrac{2^{s-\alpha-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha-\frac{s}{2}+1\right)} = \int_0^\infty J_\alpha(x) x^{s-\alpha-1}\,\mathrm{d}x$
$J_\alpha(x)$	$\dfrac{2^{s-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1-\frac{s}{2}\right)}$
$x^a J_\alpha(x)$	$\dfrac{2^{a+s-1}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+a+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-a-s}{2}+1\right)}$
$\sqrt{x}\, J_\alpha(x)$	$\dfrac{2^{s-1/2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{s}{2}+\frac{3}{4}\right)}$
$K_\alpha(x)$	$2^{s-2}\,\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{2}\right)$
$K_0(x)$	$2^{s-2}\left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right]^2$
$x^\alpha K_\alpha(x)$	$2^{s+\alpha-2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$
$K_0(\sqrt{x})$	$2^{2s-1}[\Gamma(s)]^2$
$K_0(2\sqrt{x})$	$\frac{1}{2}[\Gamma(s)]^2$
$\mathrm{e}^{-ax}\cos bx$	$a^{-s}\cos^s\varphi\,\Gamma(s)\cos\varphi s = b^{-s}\sin^s\varphi\,\Gamma(s)\cos\varphi s$ avec $\tan\varphi = \frac{b}{a}$, $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$
$\mathrm{e}^{-ax}\sin bx$	$a^{-s}\cos^s\varphi\,\Gamma(s)\,\sin\varphi s$

4.4 Transformations réciproques et transformation de Hankel

4.4.1 Transformations réciproques

Soit $K(h, t)$ une fonction de h et de t et 2 fonctions de la variable t f et g.
On dit que l'on a une transformation réciproque si K est telle que l'on ait à la fois

$$f(t) = \int_0^\infty K(h, t) g(h) \, dh \quad \text{et} \quad g(h) = \int_0^\infty K(h, t) f(t) \, dt.$$

K est appelé le *noyau* de la transformation.
Condition pour que K, étant une fonction du produit $u = ht$, soit noyau d'une transformation réciproque :

$$\rho(s)\rho(1-s) = 1, \qquad \rho \text{ étant la transformée de Mellin de } K(u).$$

1° Transformation réciproque en cosinus :

$$K = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x \text{ est un noyau. En effet, } \rho(s)\rho(1-s) = 1.$$

Si $f(x) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \omega x g(\omega) \, d\omega$, on a $g(\omega) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \omega x f(x) \, dx$.

2° Transformation réciproque en sinus :

Si $f(x) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \omega x g(\omega) \, d\omega$, on a $g(\omega) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \omega x f(x) \, dx$.

3° **Transformation de Hankel.** — C'est la transformation de noyau

$$K(u) = u^{1/2} J_\alpha(u).$$

Ce noyau remplit la condition $\rho(s)\rho(1-s) = 1$; J_α fonction de Bessel d'ordre α.

$$f(x) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\alpha(xy) g(y) \, dy \quad \text{et} \quad g(y) = \int_0^\infty (xy)^{1/2} J_\alpha(xy) f(x) \, dx.$$

Autres formes de la transformation

Si $f(x) = x^{1/2}\,\varphi(x)$ et $g(y) = y^{1/2}\,\gamma(y)$

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} y\,J_\alpha(xy)\gamma(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \gamma(y) = \int_0^{\infty} x\,J_\alpha(xy)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si $x = \sqrt{2t}$ et $y = \sqrt{2s}$:

$$\varphi(\sqrt{2t}) = F(t) = \int_0^{\infty} J_\alpha(2\sqrt{ts})\,G(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\gamma(\sqrt{2s}) = G(s) = \int_0^{\infty} J_\alpha(2\sqrt{ts})F(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Règles opératoires :

1° Relation de récurrence :

$$H_\alpha[x^{-1}\varphi(x)] = \frac{y}{2\alpha}\{H_{\alpha-1}[\varphi(x)] + H_{\alpha+1}[\varphi(x)]\}\,.$$

2° Transformée de la dérivée :

$$H_\alpha(\varphi') = \frac{-y}{2\alpha}[(\alpha+1)H_{\alpha-1} - (\alpha-1)H_{\alpha+1}]\,.$$

Si $\alpha = 1$: $H_1(\varphi') = -yH_0(\varphi)$.

3° Transformée de $\left(\varphi'' + \dfrac{\varphi'}{x}\right)$ pour $\alpha = 0$:

$$H_0\left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{x}\right) = -y^2 H_0(\varphi)\,, \quad \text{à condition que} \quad \left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xJ_0)\right]_0^{\infty} = 0\,.$$

4° Produit. Si $F(y) = H_\alpha[f(x)]$ et $G(y) = H_\alpha[g(x)]$:

$$\int_0^{\infty} yF(y)\cdot G(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} xf(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

5° Formule de réciprocité.

Soient H et G les images de Laplace des fonctions $t \mapsto f(t)\,t^{\alpha/2}$ et $t \mapsto g(t)\,t^{\alpha/2}$; f et g étant 2 fonctions réciproques de Hankel, on a :

$$G(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}}H\left(\frac{1}{p}\right)\,.$$

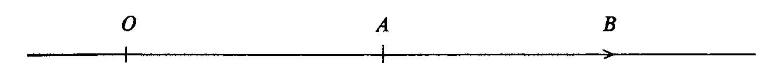
4.4.2 Tableau de quelques transformées de Hankel

Fonction $\varphi(x)$	Transformée $\int_0^\infty xJ_\alpha(xy)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$
	$a > 0$ et $(\alpha > -1)$
$x^{-1}\mathrm{e}^{-ax}$	$-\dfrac{y^{-\alpha}}{\sqrt{y^2+a^2}}(\sqrt{y^2+a^2}-a)^\alpha$
$x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-ax}$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}}\dfrac{2y^\alpha}{(y^2+a^2)^{\alpha+1/2}}$, $a > 0, \alpha > 0$
$x^\alpha \mathrm{e}^{-ax^2}$	$\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{y}{2a}\right)^\alpha \mathrm{e}^{-y^2/4a}$, $a > 0, \alpha \geq 0$
$x^{-1}\Theta\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$	$y^{-1}\mathrm{e}^{-y^2/4}\; I_0\left(\dfrac{y^2}{4}\right)$, $\alpha > -1$
$\dfrac{\sin ax}{x}$	$(a^2-y^2)^{-1/2}$, $0 < y < a$, $\alpha = 0$
x^{-1}	y^{-1}, $\alpha > -1$
$x^{-1}\left[\left(\ln\dfrac{x^2}{2}+C\right)^2-\dfrac{\pi^2}{6}\right]$	$y^{-1}\left[\left(\ln\dfrac{y^2}{2}+C\right)^2-\dfrac{\pi^2}{6}\right]$, $\alpha = 1$ C = constante d'Euler
$x^{-1}\left[\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{Si}\,\dfrac{x^2}{2}\right]$	$-y^{-1}\left[\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{Si}\,\dfrac{x^2}{2}\right]$, $\alpha = 1$
$(a^2-x^2)^{-1/2}$	$\dfrac{1-\cos ay}{ay}$, $\alpha = 1$, $0 < x < a$

5 • CALCUL VECTORIEL ET CALCUL TENSORIEL

5.1 Calcul vectoriel

5.1.1 Identité de Chasles



$\overrightarrow{AB}$ = objet mathématique défini par sa direction (*AB*), son sens (de *A* vers *B*) et sa norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ (la longueur *AB*).

La relation de Chasles s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}.$$

5.1.2 Produit scalaire

C'est le produit des mesures de ces 2 vecteurs par le cosinus de leur angle. C'est un *scalaire.*

En dimension 2 ou 3, on se place dans un repère orthonormé.

Soient $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, deux vecteurs de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le plan (ou (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) si l'on s'est placé dans l'espace).

Le produit scalaire $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}$ a pour expression générale :

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = \|\overrightarrow{V_1}\| . \|\overrightarrow{V_2}\| . \cos\,(\widehat{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}}),$$

où $\|\overrightarrow{V_i}\|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{V_1}$, c'est-à-dire $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ dans le plan et $\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ dans l'espace.

On connaît également l'expression analytique du produit scalaire. Dans le plan, $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2$ et dans l'espace $\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Le produit scalaire est commutatif et distributif, c'est-à-dire :

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \vec{V_2}\cdot\vec{V_1} \text{ et } (\vec{U_1} + \vec{U_2})(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{U_1}\cdot\vec{V_1} + \vec{U_2}\cdot\vec{V_1} + \vec{U_1}\cdot\vec{V_2} + \vec{U_2}\cdot\vec{V_2}.$$

5.1.3 Produit vectoriel : $\vec{V} \wedge \vec{V_1}$

Si $\vec{V}$ et $\vec{V_1}$ sont colinéaires (c'est-à-dire proportionnels), alors $\vec{V} \wedge \vec{V_1} = \vec{0}$. On suppose dorénavant que ce n'est pas le cas.

$\vec{V} \wedge \vec{V_1}$ = vecteur $\overrightarrow{OP}$ dont l'origine est un point O quelconque, la direction perpendiculaire au plan engendré par les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V_1}$ (sens tel que le trièdre $OMM_1\ P$ ait la même disposition que le trièdre de référence choisi à l'origine) et qui a pour norme le produit $|\vec{V}|\cdot|\vec{V_1}|\,|\sin(\vec{V}, \vec{V_1})|$ des mesures des vecteurs par le sinus de leurs angles. C'est *un vecteur.*

EXPRESSION EN AXES ORTHONORMÉS ; coordonnées :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} : Y_1\, Z_2 - Z_1\, Y_2, \quad Z_1\, X_2 - X_1\, Z_2, \quad X_1\, Y_2 - Y_1\, X_2.$$

Le produit vectoriel est non commutatif : $\vec{V} \wedge \vec{V_1} \neq \vec{V_1} \wedge \vec{V}$.
Distributif par rapport à l'addition

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \cdots) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OM_2} + \cdots.$$

5.1.4 Produit mixte

Produit scalaire d'un vecteur et d'un produit vectoriel. C'est un scalaire.

1° On peut permuter circulairement les 3 vecteurs composants.

$$\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \vec{V_2}\cdot(\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}) = \vec{V_3}\cdot(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}).$$

2° On peut intervertir les signes $\cdot$ et $\wedge$:

$$\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2})\cdot\vec{V_3}.$$

3° Expression analytique (axes orthonormés) :

$$(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Valeur absolue = mesure du volume du parallélépipède qui a pour arêtes les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ équipollents aux vecteurs donnés ; c'est aussi le produit par 6 de la mesure du volume du tétraèdre $OM_1\, M_2\, M_3$.

5.1.5 Double produit vectoriel de 3 vecteurs

$$T = \overrightarrow{V_1} \wedge (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) \qquad \text{Non commutatif.}$$

$$T = (\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_3})\, \overrightarrow{V_2} - (\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2})\, \overrightarrow{V_3}$$

5.1.6 Barycentre

G est barycentre du système $\{(A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \cdots, (A_n, \lambda_n)\}$ si, et seulement si :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OA_n}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \;;\; (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \neq 0)$$

$$\lambda_1 \overrightarrow{GA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{GA_n} = 0\,.$$

$$G \begin{cases} x = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}, \\[2ex] y = \dfrac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}, \\[2ex] z = \dfrac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}. \end{cases}$$

Si

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0\,,$$

le vecteur $\overrightarrow{MV} = \lambda_1\, \overrightarrow{MA_1} + \lambda_2\, \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \lambda_n\, \overrightarrow{MA_n}$ est indépendant de M.

5.2. Vecteurs glissants. Moments

5.2.1 Moment d'un vecteur par rapport à un point

$A(x_0, y_0, z_0)$, (X, Y, Z) = composantes de $\overrightarrow{AB}$, $\mathcal{M}_0^{t}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OG}$.

$$O\text{, origine des coordonnées} \Rightarrow \overrightarrow{OG} \begin{cases} L = y_0 Z - z_0 Y, \\ M = z_0 X - x_0 Z, \\ N = x_0 Y - y_0 X. \end{cases}$$

Moment en O_1, (x_1, y_1, z_1) : $\overrightarrow{O_1 G_1} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{O_1 O} \wedge \overrightarrow{Ob}$ $(\overrightarrow{Ob} = \overrightarrow{AB})$,

$$\overrightarrow{O_1 G_1} \begin{cases} L_1 = L - y_1 Z + z_1 Y, \\ M_1 = M - z_1 X + x_1 Z, \\ N_1 = N - x_1 Y + y_1 X. \end{cases}$$

5.2.2 Moment d'un vecteur par rapport à un axe Δ

Δ défini par $O_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{U}(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$\mathcal{M}_\Delta^{t} = \frac{\alpha L + \beta M + \gamma N + \lambda X + \mu Y + \nu Z}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

où

$$\begin{cases} \lambda = y_1 \gamma - z_1 \beta, \\ \mu = z_1 \alpha - x_1 \gamma, \\ \nu = x_1 \beta - y_1 \alpha. \end{cases} \quad \text{est le } \mathcal{M}_O^{t}(\overrightarrow{U})$$

5.2.3 Moment relatif de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$

$$\mathcal{M}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{A'A} \wedge \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{A'B'} = (\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{A'B'}).\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{OG'}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{LX'} + \overrightarrow{MY'} + \overrightarrow{NZ'} + \overrightarrow{L'X} + \overrightarrow{M'Y} + \overrightarrow{N'Z}.$$

5.2.4 Eléments de réduction d'un système de vecteurs (ou torseur)

Résultante générale ou somme géométrique :

$$\overrightarrow{OR} = \sum \overrightarrow{A_iB_i} \begin{cases} X = \sum X_i \\ Y = \sum Y_i \\ Z = \sum Z_i. \end{cases}$$

Moment résultant en O : $\overrightarrow{OG} = \sum \overrightarrow{OG_i} \begin{cases} L = \sum L_i, \\ M = \sum M_i, \\ N = \sum N_i. \end{cases}$

Moment en O_1 : $\overrightarrow{O_1G_1} = \overrightarrow{OG} + \mathcal{M}^{t}_{O_1}(\overrightarrow{OR})$.

Les composantes écrites pour un vecteur restent valables.
Moment par rapport à un axe : les formules écrites pour un vecteur restent valables.

Invariants du système :

$$\overrightarrow{O_1R}\ (X, Y, Z) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1R}.\overrightarrow{O_1G_1} = L_1 X + M_1 Y + N_1 Z$$

sont indépendants du point O_1 envisagé.

5.2.5 Axe central

Lieu des points où le moment résultant est parallèle à $\overrightarrow{OR}$ (c'est la droite parallèle à $\overrightarrow{OR}$) :

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}.$$

5.2.6 Systèmes équivalents

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OG} = 0$,	système équivalent à 0 ;
$\overrightarrow{OR} = 0$, $\overrightarrow{OG} \neq 0$ (constant),	système équivalent à un couple ;
$\overrightarrow{OR} \neq 0$, $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$,	système équivalent à un vecteur unique (le support de ce vecteur est le lieu des points où le moment résultant est nul) ;
$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OG} \neq 0$,	torseur le plus général, équivalent à un vecteur et un couple ou à deux vecteurs non coplanaires.

AU POINT DE VUE ANALYTIQUE

$LX + MY + NZ \neq 0$: Système équivalent à 2 vecteurs non situés dans un même plan ; équivalent aussi à un vecteur dirigé suivant l'axe central et à un couple dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

$LX + MY + NZ = 0$: Système équivalent à 2 vecteurs situés dans un même plan.

- 1° $X^2 + Y^2 + Z^2 > 0$: Système équivalent à un vecteur unique dirigé suivant l'axe central.
- 2° $X = Y = Z = 0$, $L^2 + M^2 + N^2 > 0$: Système équivalent à un couple unique.
- 3° $X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0$, $L = 0,\ M = 0,\ N = 0$: Système équivalent à zéro.

5.3 Analyse vectorielle

Dérivée d'un vecteur. — Si le vecteur $\vec{U}$ est fonction d'un paramètre *t*, la dérivée U' est la limite du vecteur

$$\frac{\vec{U}(t+\Delta t)-\vec{U}(t)}{\Delta t} \quad \text{quand} \quad \Delta t \to 0 \;;$$

c'est un vecteur ; c'est la tangente à la trajectoire de l'extrémité des vecteurs équipollents à $\vec{U}(t)$ menés par un point fixe.

On déduit : si le vecteur a un module constant (non nul), il est perpendiculaire à sa dérivée.

Si le vecteur $\vec{U} \neq 0$ satisfait à $\vec{U} \wedge \vec{U'} = 0$, sa direction est fixe.

Si l'on a $\vec{U} \neq 0$, $\vec{U} \wedge \vec{U'} \neq 0$ et $\vec{U}\ \vec{U'}\ \vec{U''}$ (produit mixte) = 0, le vecteur $\vec{U}$ est parallèle à un plan fixe.

5.3.1 Expressions de dérivées vectorielles et règles de dérivation

$\overrightarrow{U(t)}$, $\overrightarrow{V(t)}$, vecteurs fonctions d'une variable t :

$$\vec{U}\begin{cases} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{U}}{dt}\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} \\ \dfrac{dY}{dt} \\ \dfrac{dZ}{dt} \end{cases} \quad \frac{d^p\vec{U}}{dt^p}\begin{cases} \dfrac{d^pX}{dt^p} \\ \dfrac{d^pY}{dt^p} \\ \dfrac{d^pZ}{dt^p} \end{cases} \qquad \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d\vec{U}}{du}\cdot\frac{du}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{U}+\vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt}+\frac{d\vec{V}}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}[\lambda(t)\vec{U}] = \frac{d\lambda}{dt}\vec{U}+\lambda\frac{d\vec{U}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{U}\cdot\vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt}\cdot\vec{V}+\vec{U}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}(\vec{U}\wedge\vec{V}) = \frac{d\vec{U}}{dt}\wedge\vec{V}+\vec{U}\wedge\frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Dans cette dernière expression, ne pas modifier l'ordre des facteurs.

Dérivée d'un point. Si un point est fonction d'une variable t, et en désignant par $M(t)$ ce point, la dérivée du point est la limite du vecteur.

$$\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} \quad \text{quand} \quad \Delta t \to 0 .$$

C'est donc un vecteur. On écrit $M'(t) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. Si l'on joint M à un point fixe O, $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ est également la dérivée du vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{OM}$.

5.3.2 Formule de Taylor

$$\vec{U}(t) = \vec{U}(t_0) + \frac{t-t_0}{1\,!}\vec{U}'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)\,!}\vec{U}^{(n-1)}_{(t_0)} + \frac{(t-t_0)^n}{n\,!}[\vec{U}^{(n)}_{(t_0)} + \vec{\varepsilon}\,],$$

où $\vec{\varepsilon} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad t \to t_0 .$

5.3.3 Fonctions de points

Fonctions dépendant de la position d'un point M. Fonction scalaire s'il s'agit d'un élément scalaire (densité, potentiel, etc.).
Fonction vectorielle s'il s'agit d'un vecteur (vitesse, accélération, champ électrique, magnétique, etc.).

GRADIENT. — Point $M = 0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; x, y, z, coordonnées du point ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vecteurs unitaires selon les axes. Soit $m = f(M)$:

$$\text{grad}\, m = \frac{\partial m}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial m}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial m}{\partial z}\vec{k}. \text{ Vecteur.}$$

On a $\text{grad}\, m.\mathrm{d}M = \mathrm{d}m$.

SURFACES DE NIVEAU. — Surfaces telles que $m = Cte$, soit $\mathrm{d}m = 0$.

On a alors $\text{grad}\, m.\mathrm{d}M = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{M.\text{grad}\, m}$ est normal à la surface.

LIGNE DE FORCE. — Lieu de M tel que vecteur $M(\text{grad}\ m)$ soit tangent à cette ligne : $\text{grad}\, m \wedge \mathrm{d}M = 0$.

DÉRIVÉE NORMALE DE m PAR RAPPORT A UNE SURFACE S :
$(\overrightarrow{\text{grad}\, m}) \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ = vecteur unitaire de la normale à S (scalaire, produit de 2 vecteurs). C'est la projection de (grad m) sur la normale.

PROPRIÉTÉS DU GRADIENT :

1° Soit $f(m, n, \ldots)$, on a

$$\text{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial m}\, \text{grad}\, m + \frac{\partial f}{\partial n}\, \text{grad}\, n + \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \text{grad}\,(m+n) &= \text{grad}\, m + \text{grad}\, n \\ \text{grad}\,(m \cdot n) &= m\,\text{grad}\, n + n\,\text{grad}\, m \end{aligned}\right\} \text{Formules analogues à celles de la dérivation.}$$

$$\text{grad}\left[\int_a^m f(m)\,\mathrm{d}m\right] = f(m)\, \text{grad}\, m.$$

DIVERGENCE ET ROTATIONNEL :

$\vec{U}$, vecteur fonction du point M.

$$M = 0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

$$\text{div}\, \vec{U} = \vec{i}\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \vec{U}}{\partial z}, \text{ scalaire ;}$$

$$\text{rot}\, \vec{U} = \vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}, \text{ vecteur.}$$

Expressions analytiques. — Si X, Y, Z sont les composantes de $\vec{U}$:

$$U = \vec{i}\,X + \vec{j}\,Y + \vec{k}\,Z,$$

$$\text{div}\, \vec{U} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\text{rot}\, \vec{U} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

Propriétés. — 1° Si $\vec{U} = Cte$, div $\vec{U} = 0$, rot $\vec{U} = 0$.

2° $\vec{U}$ et $\vec{V}$, 2 vecteurs quelconques fonctions de *M,*

$$\operatorname{div}(\vec{U}+\vec{V}) = \operatorname{div}\vec{U} + \operatorname{div}\vec{V},$$

$$\operatorname{rot}(\vec{U}+\vec{V}) = \operatorname{rot}\vec{U} + \operatorname{rot}\vec{V}.$$

3° m et $\vec{U}$ étant un nombre et un vecteur fonctions de M :

$$\operatorname{div}(m\vec{U}) = m\operatorname{div}\vec{U} + (\operatorname{grad} m)\,\vec{U}$$

$$\operatorname{rot}(m\vec{U}) = m\operatorname{rot}\vec{U} + (\operatorname{grad} m)\wedge\vec{U}.$$

4° $\operatorname{div}(\vec{U}\wedge\vec{V}) = \vec{V}\operatorname{rot}\vec{U} - \vec{U}\operatorname{rot}\vec{V}.$

5° $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} m) = 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{U}) = 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{grad} m) = \Delta m.$

6° $\operatorname{grad}(\vec{U}.\vec{V}) = \vec{U}\wedge\operatorname{rot}\vec{V} + \vec{V}\operatorname{rot}\vec{U} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\vec{V}} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}\vec{U}}.$

7° $\operatorname{rot}(\vec{U}\wedge\vec{V}) = \vec{U}\operatorname{div}\vec{V} - \vec{V}\operatorname{div}\vec{U} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\vec{V}} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}\vec{U}}.$

8° $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{U}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{U}) - \Delta\vec{U}.$

Δ étant l'opérateur laplacien défini plus loin, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\vec{V}}$ = dérivée de $\vec{U}$ suivant $\vec{V}$ (voir ci-après).

OPÉRATEURS. — Opérateur laplacien :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Appliqué à une fonction scalaire m :

$$\Delta m = \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2}.$$

Appliqué à un vecteur $\vec{U}$:

$$\Delta\vec{U} = \frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{U}}{\partial z^2}, \text{ vecteur.}$$

Opérateur hamiltonien ou *nabla*

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Appliqué à une fonction scalaire m :

$$\nabla m = \vec{i}\frac{\partial m}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial m}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial m}{\partial z} = \text{grad } m.$$

Produit scalaire de ∇ et du vecteur $\vec{U}$:

$$\nabla . \vec{U} = \text{div } \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

Produit vectoriel de ∇ et du vecteur $\vec{U}$:

$$\nabla \wedge \vec{U} = \vec{i}\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial z}\right) = \text{rot}\,\vec{U}$$

Dérivée d'un vecteur suivant un autre vecteur :

Dérivée de $\vec{U}$ suivant $\vec{V}$: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\vec{V}} = \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial x}V_x + \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial y}V_y + \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z}V_z.$

5.3.4 Formules de l'analyse vectorielle

Circulation d'un vecteur $\vec{u}$ fonction de M :

C'est l'intégrale curviligne $\int_C \vec{u}\,\mathrm{d}M$. En mécanique, c'est le travail de la force $\vec{u}$.

Flux d'un vecteur sortant d'une surface S ($\mathrm{d}\sigma$, élément d'aire) :

C'est $\iint_S \vec{n}\,.\,\vec{u}\,\mathrm{d}\sigma$, $\vec{n}$ = vecteur unitaire de la normale, un sens positif ayant été fixé.

Formules fondamentales :

1° Théorème d'Ostrogradsky (ou formule de la divergence).

S, surface fermée limitant le volume τ.

$$\iiint_\tau \text{div } \vec{U}\,\mathrm{d}\tau = \iint_S \vec{n}\,.\,\vec{u}\,\mathrm{d}\sigma.$$

L'intégrale de la divergence d'un vecteur, étendue à un volume est égale au flux de ce vecteur sortant de la surface qui limite ce volume.

2° FORMULE DU GRADIENT.

$$\iiint_\tau \text{grad } m \, d\tau = \iint_S \overrightarrow{n} \cdot m \, d\sigma .$$

3° FORMULE DU ROTATIONNEL :

$$\iiint_\tau \text{rot } \overrightarrow{u} \, d\tau = \iint_S \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u} \, d\sigma .$$

4° FORMULE DE GREEN. — p et q étant 2 scalaires fonctions de M,

$$\iiint_\tau (p\Delta q - q\Delta p) d\tau = \iint_S (p \text{ grad } q - q \text{ grad } p) \overrightarrow{n} \, d\sigma .$$

5° FORMULE DE STOKES. — La circulation du vecteur $\overrightarrow{u}$ le long d'une courbe fermée C est égale au flux de son rotationnel sortant de S, surface délimitée par C :

$$\int_C \overrightarrow{u} \, dM = \iint_S \overrightarrow{n} \cdot \text{rot } \overrightarrow{u} \, d\sigma .$$

5.4 Calcul tensoriel

5.4.1 Généralisation de la notion de vecteur

Une suite de n nombres dans un espace R^n, pris dans un ordre donné, constitue un vecteur.
Tout vecteur de cet espace peut se mettre sous la forme

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_1} \, x^1 + \overrightarrow{e_2} \, x^2 + \cdots + \overrightarrow{e_n} \, x^n,$$

les vecteurs e_i étant les composantes d'une base dans R^n, x^i étant les composantes du vecteur $\overrightarrow{x}$.

CHANGEMENT DE BASE. — Soit une autre base du même espace R^n, définie par les E_i. On a

$$E_i = a_i^1 \, \overrightarrow{e_1} + a_i^2 \, \overrightarrow{e_2} + \cdots + a_i^n \, \overrightarrow{e_n} ,$$

les a sont les projections des E sur les axes déterminés par les e.

On écrit $E_j = \sum_i a_j^i \vec{e}_i$: la composante selon l'axe j dans le système E est la somme des termes dont l'indice inférieur des a est j et l'indice supérieur toutes les valeurs de 1 à n.
i, indice de sommation, s'appelle *indice muet.*
Si l'on résout par les formules de Cramer, on a

$$\vec{e}_1 = b_1^1 \ \vec{E}_1 + b_1^2 \ \vec{E}_2 + \cdots + b_1^n \ \vec{E}_n$$
$$\vec{e}_1 = b_i^1 \ \vec{E}_1 + b_i^2 \ \vec{E}_2 + \cdots + b_i^n \ \vec{E}_n$$
$$\vec{e}_1 = \sum_j b_i^j E_j .$$

Relations entre les a et les b.

$b_i^j = \dfrac{A_j^i}{A}$, A = déterminant des a, A_j^i = coefficient des a_j^i dans A (mineur avec son signe) ;

$a_k^l = \dfrac{B_l^k}{B}$, B = déterminant des b, B_l^k = coefficient des b_l^k
$B = \dfrac{1}{A}$.

$$\sum_i a_j^i \ b_i^k = 1 \text{ si } k = j, \quad = 0 \text{ si } k \neq j .$$

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES D'UN VECTEUR V dans un changement de base :

$$X^i = \sum_j b_j^i x^j , \quad x^j = \sum_i a_i^j x^i .$$

Les nouveaux X (dans les nouveaux axes) se déduisent des anciens x (anciens axes) par les coefficients b qui donnent les anciens e en fonction des nouveaux E.

PRODUIT SCALAIRE DE 2 VECTEURS :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x^1 \ \vec{e}_1 + x^2 \ \vec{e}_2 + \cdots + x^n \ \vec{e}_n) \ (y^1 \ \vec{e}_1 + \cdots + y^n \ \vec{e}_n)$$
$$= x^1 \ \vec{e}_1 \ \sum_i y^i \vec{e}_i + \cdots + x^j \ \vec{e}_j \ \sum_i y^i \vec{e}_i + \cdots,$$

que l'on écrit :

$$\sum_{ij} \vec{e_i}\,\vec{e_j}\; x^j\, y^j,$$

i et j prenant toutes les valeurs de 1 à n.
On écrit encore cette sommation sous la forme abrégée.

$$\vec{x}\;\vec{y} = \vec{e_i}\;\vec{e_j}\; x^i\, x^j, \qquad \text{convention d'Einstein .}$$

TENSEUR MÉTRIQUE. — Par définition, c'est $g_{ij} = \vec{e_i}\;\vec{e_j}\; \left(= \sum_{ij} \vec{e_i}\,\vec{e_j} \right)$.
Ensemble de n^2 coefficients.

NORME D'UN VECTEUR. — Produit scalaire d'un vecteur par lui-même :

$$\vec{x}\cdot\vec{x} = g_{ij}\, x^i\, x^j, \quad \text{qu'on écrit } (\vec{x})^2 = (N\vec{x}).$$

Dans R^3, en coordonnées orthogonales, $V^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
Si $e_1 = e_2 = \cdots = 1$, la base est normée.
En coordonnées orthogonales et normées, $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = 0$ si $i \neq j$ et $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = 1$ si $i = j$.

ANGLE DE 2 VECTEURS (dans R^n) :

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij}x^i y^j}{\sqrt{g_{ij}x^i x^j}\sqrt{g_{ij}y^i y^j}}.$$

(rappelons toujours qu'il s'agit de sommations).

5.4.2 Coordonnées contravariantes et covariantes

Soit le vecteur $\vec{x} = \vec{e_j}\, x^j$. Formons le produit scalaire $\vec{e_i}\cdot\vec{x}$:

$$\vec{e_i}\cdot\vec{x} = e_i\, e_j\, x^j = g_{ij}\, x^j.$$

Cette dernière quantité s'écrit $g_{ij}\, x^j = x_i$, et s'appelle coordonnée covariante de $\vec{x}$.

Signification géométrique dans R^2 :

$$x^1 = a_1, \qquad x^2 = a_2,$$

$$x_1 = a_1', \qquad x_2 = a_2',$$

confondues en coordonnées orthogonales.

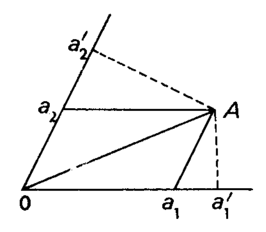
Relations

$$x_i = g_{ij}\, x^j, \quad x^j = g^{ij}\, x_i, \quad \text{avec} \quad g^{ij} = \frac{A_j^i}{g}.$$

g = déterminant des g_{ij}.

Produit scalaire : $\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i\, y_i$.

Norme : $(Nx) = g_{ij}\, x^i\, x^j = g^{ij}\, x_i\, x_j = x^i\, x_i$.



5.4.3 Définition d'un tenseur

Groupe de termes appelés composantes du tenseur (en nombre 3^p dans R^3) chacune de ces composantes étant rattachée à 1, 2, 3 ou n axes de coordonnées et tels que, dans un changement de base défini par les a et les b, les nouvelles composantes dérivent des anciennes au moyen des formules de transformation suivantes :
Si l, m, n sont les indices des nouveaux axes correspondant à i, j, k, des anciens, la composante

$$T_n^{lm} = \sum_{i,\,j,\,k} b_i^l\, b_j^m\, a_n^k\, t_k^{ij},$$

la sommation se faisant selon les indices de l'ancienne base et en respectant la règle des indices muets (les indices supérieurs correspondant aux composantes contravariantes, et les indices inférieurs aux composantes covariantes).
La position des indices indique la variance.
Le nombre des indices indique l'ordre p du tenseur.
On a donc des tenseurs entièrement contravariants (ne comportant que des indices supérieurs) ; des tenseurs entièrement covariants (ne comportant que des indices inférieurs) ; des tenseurs mixtes (comportant les 2 sortes d'indices).

5.4.4 Propriétés des tenseurs

Addition. — Les tenseurs de même ordre et de même variance s'additionnent : $t_k^{ij} + u_k^{ij}$ est encore un tenseur.

Multiplication par un scalaire : $t_k^{ij} \times \lambda = \lambda\, t_k^{ij}$ est encore un tenseur.

Multiplication de 2 *tenseurs* : étant donnés 2 tenseurs d'ordres et de variances quelconques, les divers produits d'une composante du premier et d'une composante du second sont les composantes d'un tenseur.

Multiplication d'un tenseur d'ordre n par les composantes de n vecteurs de variances inverses et sommation des termes : on a un invariant.

Relations entre les composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur et transformation des tenseurs :

$$\sum_h t^{ijh} g_{hk} = t^{ij}_k \ ; \quad t^{ijk} = \sum_h t^{ij}_h \, g^{hk} \quad \text{(Disposition de l'indice).}$$

Tenseur de Kronecker. — Transformation du tenseur métrique en tenseur mixte :

$$g^i_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad = 1 \ \text{si} \quad i = j \, .$$

5.4.5 Coordonnées curvilignes

Soit un système de coordonnées curvilignes tel que (dans R^3) :

$$x^1 = f_1(y^1, y^2, y^3), \quad x^2 = f_2(y^1, y^2, y^3), \quad x^3 = f_3(y^1, y^2, y^3).$$

Si on exprime y^1, y^2, y^3 en fonction des x^1, x^2, x^3 :

$$y^1 = g_1(x^1, x^2, x^3), \quad y^2 = g_2(x^1, x^2, x^3), \quad y^3 = g_3(x^1, x^2, x^3).$$

Les y sont les coordonnées du point dans un système de coordonnées défini par les surfaces $g_1 = g_2 = g_3 = 0$.

Condition. — Il faut que le jacobien $j \neq 0$,

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y^3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y^3} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial y^1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y^2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y^3} \end{vmatrix} \neq 0 \, .$$

On définit le repère naturel dans ce système par

$$\vec{e}_1\left\{\frac{\partial x^1}{\partial y^1}, \frac{\partial x^2}{\partial y^1}, \frac{\partial x^3}{\partial y^1}\right. \text{ (dans les systèmes des } x_1\ x_2\ x_3\text{)}.$$

Tenseur métrique appelé ici *tenseur fondamental* : $\vec{e}_i\ \vec{e}_j$.
Elément linéaire

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, dy^i\, dy^j.$$

5.4.6 Symboles de Christoffel

Déterminons, par rapport à un repère R attaché au point $M(x^i)$, le repère similaire (R') relatif au point infiniment voisin M', de coordonnées curvilignes $x^i + dx^i$.
Les composantes du vecteur e_i', dans la base R, sont : ω_i^1 , ω_i^2 , ..., ω_i^n infiniment petits, combinaisons linéaires et homogènes des dx^i, ..., dx^n.
On pose $\omega_i^k = \Gamma_{ir}^k dx^r$. D'où

$$d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k = \Gamma_{ir}^k \vec{e}_k\ dx^r.$$

Ces Γ_{ir}^k au nombre de n^3 (dans R^3) sont appelés symboles de Christoffel. On a

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \Gamma_{ikj} = g_{hk}\Gamma_{ij}^h, \quad \Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki}.$$

Les quantités Γ_{ij}^k sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs ; et les Γ_{ikj} sont symétriques par rapport à leurs indices extrêmes.
Explicitation des symboles de Christoffel.
On a :

$$\Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \quad \text{ou } \partial_k g_{ij}.$$

$$\Gamma_{jki} = \Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}).$$

DIFFÉRENTIELLE ABSOLUE D'UN VECTEUR OU D'UN TENSEUR :

$$DV = e_i(dV^i + \omega_h^i\ V^h).$$

Composantes contravariantes de la différentielle absolue :

$$\nabla_k V^i = \partial_k V^i + \Gamma^i_{kh} V^h, \quad \text{avec} \quad \partial_k V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^k}.$$

Composantes covariantes de la différentielle absolue :

$$\Delta_k V_i = -\partial_k V_i - \Gamma^h_{ki} V_h.$$

THÉORÈME DE RICCI. — La différentielle absolue du tenseur fondamental g_{ij} est nulle.

6 • GÉOMÉTRIE

6.1 Birapport, critère de cocyclicité

Birapport ou rapport anharmonique

BIRAPPORT DE QUATRE DROITES CONCOURANTES

On considère quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4, concourantes en O et une droite Δ sécante aux quatre droites en quatre points distincts A, B, C et D. On définit le *birapport ou rapport anharmonique* de ces droites :

$$[A,B,C,D]=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}.$$

On rappelle que $\overline{AB}$ désigne la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur une droite $(A;\vec{i})$, où $\vec{i}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, et vaut $\pm AB$, selon que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a même sens ou non que le vecteur $\vec{i}$.
Le birapport $[A, B, C, D]$ est indépendant de la sécante Δ et ne dépend donc que des positions relatives des droites d_1, d_2, d_3 et d_4. On le notera donc $[d_1, d_2, d_3, d_4]$, plutôt que $[A, B, C, D]$.
Lorsque le birapport de quatre points alignés vaut -1, on dit que ces quatre points sont en *division harmonique*.

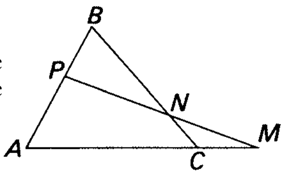
CRITÈRE DE COCYCLICITÉ DE QUATRE POINTS

On se place dans le plan rapporté au plan complexe. On considère quatre points A, B, C et D, d'affixes respectives a, b, c et d. Leur birapport est défini par :

$$[A,B,C,D]=\frac{c-a}{d-a}.\frac{d-b}{c-b}.$$

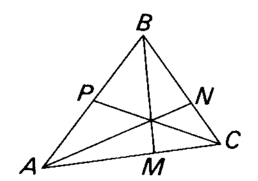
Pour que A, B, C et D soient cocycliques, c'est-à-dire situés sur un même cercle, il faut et il suffit qu'ils vérifient :
1° $[A, B, C, D]$ est un nombre réel.
2° La partie imaginaire du nombre complexe $(\overline{b-a})(c-a)$ est non nulle (sinon, ces quatre points seraient alignés).

6.2 Géométrie et formules du triangle



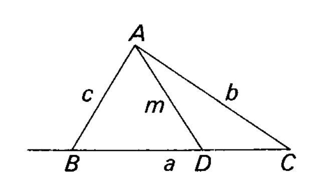
Théorème de Ménélaus. — Relation entre segments déterminés sur les côtés d'un triangle par une sécante

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}.\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}=1.$$



Théorème de Céva. — Relation entre segments déterminés sur les côtés d'un triangle par des droites concourantes issues des 3 sommets :

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}.\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}=1.$$



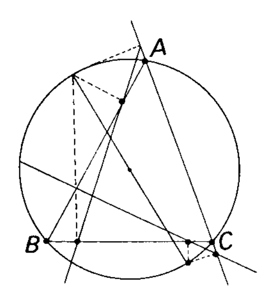
Théorème de Stewart :

$$\overline{AB^2}.\overline{CD} \pm \overline{AC^2}.\overline{BD} = \overline{AD^2}.\overline{BC} \pm \overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB},$$

± suivant que D intérieur ou extérieur à (BC).
Si (AD) est médiane :

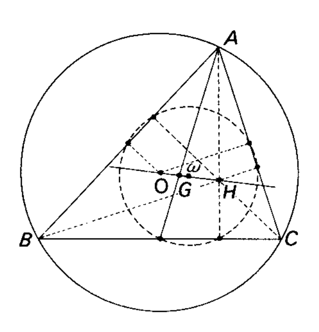
$$\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2\overline{AD^2} + 2\overline{DC^2}$$

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}.$$



Droite de Simson.

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du cercle circonscrit à un triangle, sur les côtés de ce triangle sont en ligne droite.
Les droites de Simson de 2 points diamétralement opposés du cercle sont perpendiculaires. Le lieu de leur point de rencontre est le cercle des neufs points du triangle.



Cercle des neuf points.

Cercle passant par les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments des hauteurs compris entre le sommet et l'orthocentre. Rayon : $R/2$, R rayon du cercle circonscrit au triangle ABC ; O centre du cercle circonscrit ; H orthocentre ; G, point de concours des médianes ; ω = centre du cercle des 9 points. O, H, G, ω sont 4 points alignés (droite d'Euler)

$$O\omega = OH/2,$$
$$GO = 2G\omega = GH/2.$$

D'où $OG = 2O\omega/3$. Les 4 points O, G, ω, H forment une division harmonique. (leur birapport vaut – 1).

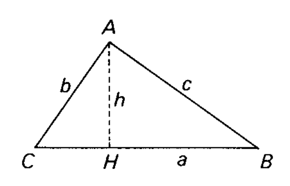
Propriétés du cercle des 9 points :

Le cercle des 9 points est tangent au cercle inscrit et aux 3 cercles exinscrits au triangle (théorème de Feuerbach).
Les 3 triangles formés par les sommets A, B, C et l'orthocentre H ont même cercle des 9 points. Ce dernier est donc tangent aux 16 cercles inscrits et exinscrits à ces 4 triangles.
Le lieu géométrique des centres des hyperboles équilatères passant par les 3 sommets d'un triangle est le cercle des 9 points de ce triangle.

6.2.1 Relations algébriques et trigonométriques dans le triangle

TRIANGLE RECTANGLE :

$a^2 = b^2 + c^2$, théorème de Pythagore.



$$h^2 = HC.HB.$$

$$b^2 = a.CH.$$

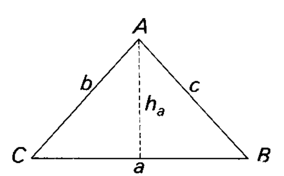
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

TRIANGLE QUELCONQUE :

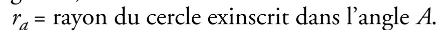
a, b, c longueurs des côtés ; $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, angles.
R = rayon du cercle circonscrit.

r = rayon du cercle inscrit.

p = demi-périmètre = $\frac{1}{2}(a+b+c)$.



h_a = hauteur issue de A.
O = centre du cercle circonscrit.
G = point de concours des médianes (centre de gravité).


r_a = rayon du cercle exinscrit dans l'angle A.

$b_a b'_a$ = bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A.


Relations géométriques :

Surface :

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{r.r_a.r_b.r_c} = \frac{abc}{4R}.$$

Rayon du cercle inscrit :

$$r = \frac{abc}{4Rp} = \frac{S}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Rayon du cercle circonscrit :

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{4S} = \frac{1}{4}(r_a + r_b + r_c - r)$$

Relation : $R^2 = \overline{OG^2} + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

Rayon du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$:

$$r_a = \frac{p}{p-a} r = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}} = p \tan\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Médiane : $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$.

Bissectrice : $b_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \dfrac{1}{b+c}\sqrt{bc\left[\left(b^2 + c^2\right) - a^2\right]}$.

Relations : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}.$$

Relations trigonométriques :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R,$$

$$a = \cos\widehat{C} + c\cos\widehat{B},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A},$$

$$a^2 = (b-c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\widehat{A}}{2} = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\widehat{A}}{2},$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{a\sin\widehat{C}}{b - a\cos\widehat{C}}, \quad \tan\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{r}{p-a} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}} = \frac{\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\sin\frac{\widehat{C}}{2}},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}} = \frac{\sin\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\cos\frac{\widehat{C}}{2}},$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}{\tan\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}},$$

$$S = p^2\tan\frac{\widehat{A}}{2}\tan\frac{\widehat{B}}{2}\tan\frac{\widehat{C}}{2} = r^2\text{cotan}\frac{\widehat{A}}{2}.\text{cotan}\frac{\widehat{B}}{2}.\text{cotan}\frac{\widehat{C}}{2}$$

$$= r_a^2\text{cotan}\frac{\widehat{A}}{2}\tan\frac{\widehat{B}}{2}\tan\frac{\widehat{C}}{2} = rr_a\text{cotan}\frac{\widehat{A}}{2} = r_b.r_c\tan\frac{\widehat{A}}{2}$$

$$= 2R^2\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C},$$

$$\begin{cases} 4S = a^2\text{cotan}\widehat{A} + b^2\text{cotan}\widehat{B} + c^2\text{cotan}\widehat{C}, \\ 2S = R\left(a\cos\widehat{A} + b\cos\widehat{B} + c\cos\widehat{C}\right). \end{cases}$$

$$a = \frac{p\sin\frac{\widehat{A}}{2}}{\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{r\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{r_a\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}} = 2R\sin\widehat{A} = \sqrt{\frac{2S\sin\widehat{A}}{\sin\widehat{B}.\sin\widehat{C}}},$$

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{p-a}{4\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{A}}{2}},$$

$$r=(p-a)\tan\frac{\widehat{A}}{2}=p\tan\frac{\widehat{A}}{2}\tan\frac{\widehat{B}}{2}\tan\frac{\widehat{C}}{2}=4R\sin\frac{\widehat{A}}{2}.\sin\frac{\widehat{B}}{2}.\sin\frac{\widehat{C}}{2}$$

$$=\frac{a\sin\frac{\widehat{B}}{2}.\sin\frac{\widehat{C}}{2}}{\cos\frac{\widehat{A}}{2}},$$

$$r_a=p\tan\frac{\widehat{A}}{2}=(p-b)\operatorname{cotan}\frac{\widehat{C}}{2}=(p-c)\operatorname{cotan}\frac{\widehat{B}}{2}=\frac{a\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}}{\cos\frac{\widehat{A}}{2}},$$

$$=4R\sin\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}=r\ \operatorname{cotan}\frac{\widehat{B}}{2}\operatorname{cotan}\frac{\widehat{C}}{2},$$

$$h_a=\frac{a\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}=\frac{2p\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}}{\cos\frac{\widehat{A}}{2}}=\frac{2r\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}}{2}}=\frac{bc\sin\widehat{A}}{a}.$$

$$=\frac{2r_a\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}}{2}}=2R\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}.$$

$$b_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\widehat{A}}{2},\ b_{a'}=\frac{2bc}{b-c}\sin\frac{\widehat{A}}{2},\ \frac{b_a}{b_{a'}}=\tan\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}.$$

Relations purement trigonométriques $(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ)$:

$$\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2},$$

$$\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}+\cos\widehat{C}=4\sin\frac{\widehat{A}}{2}\sin\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}+1,$$

$$\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}-\sin\widehat{C}=4\sin\frac{\widehat{A}}{2}\sin\frac{\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}-\cos\widehat{C}=4\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}-1,$$

$$\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}=2\cos\widehat{A}.\cos\widehat{B}.\cos\widehat{C}+2,$$

$$\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}-\sin^2\widehat{C}=2\sin\widehat{A}.\sin\widehat{B}.\cos\widehat{C},$$

$$\cos^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{B}+\cos^2\widehat{C}+2\cos\widehat{A}.\cos\widehat{B}.\cos\widehat{C}=1$$

$$\tan\widehat{A}+\tan\widehat{B}+\tan\widehat{C}=\tan\widehat{A}.\tan\widehat{B}.\tan\widehat{C},$$

$$\text{cotan}\frac{\widehat{A}}{2}+\text{cotan}\frac{\widehat{B}}{2}+\text{cotan}\frac{\widehat{C}}{2}=\text{cotan}\frac{\widehat{A}}{2}.\text{cotan}\frac{\widehat{B}}{2}.\text{cotan}\frac{\widehat{C}}{2},$$

$$\text{cotan}\widehat{A}.\text{cotan}\widehat{B}+\text{cotan}\widehat{A}.\text{cotan}\widehat{C}+\text{cotan}\widehat{B}.\text{cotan}\widehat{C}=1,$$

$$\sin 2\widehat{A}+\sin 2\widehat{B}+\sin 2\widehat{C}=4\sin\widehat{A}.\sin\widehat{B}.\sin\widehat{C},$$

$$\sin 2\widehat{A}+\sin 2\widehat{B}-\sin 2\widehat{C}=4\cos\widehat{A}.\cos\widehat{B}.\cos\widehat{C}.$$

6.2.2 Relations métriques dans les polygones

Quadrilatère inscriptible

Côtés *a*, *b*, *c*, *d*. Rayon du cercle circonscrit : *R*.
$\widehat{A}$ = angle $\widehat{DAB}$.
$\widehat{B}$ = angle $\widehat{ABC}$ etc.
α = angle des diagonales.
m, *n*, longueurs des diagonales.

$$S=\frac{1}{2}mn\sin\alpha=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},\quad p=\frac{a+b+c+d}{2}$$

$$\tan\frac{\widehat{A}}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}},\quad \tan\frac{\widehat{B}}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)p-a)}{(p-c)(p-d)}},\text{ etc.}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}},$$

$$\sin\alpha=\frac{2S}{ac+bd},\quad 2R\frac{n}{\sin\widehat{A}},$$

$$m=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}},\quad n=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}},$$

Théorèmes de Ptolémée :

$$m.n = ac + bd, \quad \frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

POLYGONES RÉGULIERS

(*c*, côté ; *a*, apothème ; *R*, rayon du cercle circonscrit ; *S*, surface.)
Rappelons que l'apothème désigne la distance du centre d'un polygone régulier à n'importe lequel de ses côtés.

Polygones	Côtés	Apothèmes	Surfaces
Triangle	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$
Carré	$R\sqrt{2}$	$R\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
Pentagone convexe ..	$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Pentagone étoilé	$\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$	
Hexagone	R	$R\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$
Octogone convexe	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$2R^2\sqrt{2}$
Octogone étoilé	$R\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	
Décagone convexe ...	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{3R^2}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
Décagone étoilé	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	
Dodécagone convexe	$\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{R}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$3R^2$

*II y a autant de polygones réguliers inscrits de n côtés que de nombres premiers avec n et inférieurs à n/*2.
La somme des angles d un polygone quelconque de n côtés est égale à 2(*n*–2) *multiplié par la mesure d'un angle droit, soit* 90 °.

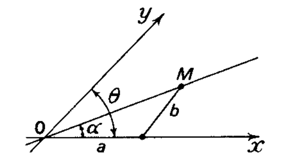
6.3 Géométrie analytique

6.3.1 Géométrie plane

Formules générales. Coordonnées cartésiennes

On notera R_2 le repère cartésiens considéré, d'axes perpendiculaires ou non.

a) *Axes quelconques* : $\overline{OM}=1$.
le couple (x, y) désigne des coordonnées de M.

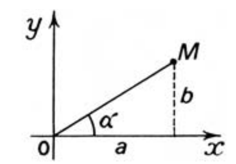


$$y = mx,\ \text{avec}\ m=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

est l'équation de la droite (OM) dans le repère.

$$a=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\quad b=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta},$$

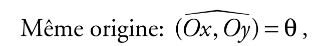
$$\tan\alpha=\frac{b\sin\theta}{a+b\cos\theta}.$$



b) Repère orthonormé.

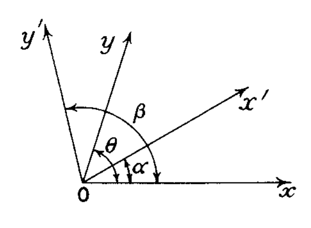
$$b=a\tan\alpha.$$

Changements d'axes. Coordonnées quelconques.


Même origine: $(\widehat{Ox,Oy})=\theta$,

$$(\widehat{Ox,Ox'})=\alpha,(\widehat{Ox,Oy'})=\beta.$$

$$\text{I}\begin{cases} x = \dfrac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y = \dfrac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta}; \end{cases}$$



$$\text{II}\begin{cases} x' = \dfrac{x\sin\beta - y\sin(\theta-\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ y' = \dfrac{y\sin(\theta-\alpha) - x\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{cases}$$

Axes perpendiculaires $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; $\beta - \alpha = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\text{I}\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha; \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha. \end{cases}$$

Si l'origine n'est pas la même, il suffit d'ajouter x_0, y_0 (coordonnées de l'ancienne origine O par rapport aux nouveaux axes) aux coordonnées des formules II.

Distance de deux points M_1 ET M_2 de coordonnées respectives (x_1, y_2) et (x_2, y_2).

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta$$

(θ : angle des axes de R_2),

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

(axes orthonormés de R_3).

ANGLE DE DEUX DIRECTIONS (axes orthonormés).

Dans $\mathbf{R}^2$: $\quad \vec{\delta}_1(\alpha_1, \beta_1), \quad \vec{\delta}_2(\alpha_2, \beta_2), \quad (\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \varphi$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}, \qquad \tan\varphi = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2},$$

$$\sin\varphi = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}.$$

AIRE DU TRIANGLE $M_1\ M_2\ M_3$ DANS $\mathbf{R}^2$.

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta,$$

(θ, angle des axes de R_2), avec M_1, M_2 et M_3 trois points de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3).

VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE $M_1\ M_2\ M_3\ M_4$ DANS $\mathbf{R}^2$.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(axes orthonormés).}$$

6.3.2 La droite

LA DROITE DANS LE PLAN

On se place dans un repère orthonormé R_2.

Représentation paramétrique.

Tout point $M(x, y)$ de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ de vecteur directeur $\vec{u}\ (\alpha, \beta)$ vérifie :

il existe un réel ρ tel que $\overrightarrow{M_0M} = \rho\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \rho x \\ y = y_0 + \rho\beta \end{cases}$

Équation cartésienne.

La forme la plus générale est $ax + by + c = 0$, avec *a*, *b*, *c* trois nombres réels et (x,y), les coordonnées d'un point *M* de la droite. Une telle droite admet pour vecteur directeur $\vec{u}\ (-b, a)$ et comme vecteur normal (orthogonal) $\vec{v}\ (a, b)$.
Si la droite n'est pas verticale (c'est-à-dire $b \neq 0$), on peut mettre son équation sous la forme : $y = mx + p$, où *m* est appelé *coefficient directeur* ou *pente* de la droite. *p* est l'ordonnée à l'origine, ce qui traduit que le point de coordonnées $(0, p)$ appartient à cette droite.

Pente de la droite.

Si l'on s'est placé dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle θ, l'angle orienté $\theta = \widehat{(\vec{i}, \vec{u})}$, $\vec{u}$ désignant un vecteur directeur de la droite considérée. Alors, avec les notations précédentes :

$$\theta = m = -\frac{a}{b}.$$

Droite passant par $M_1(x_1, y_1)$ *et* $M_2(x_2, y_2)$, *avec* $x_1 \neq x_2$.

Tout point $M(x, y)$ de cette droite vérifie : $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, qui s'écrit aussi :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Condition pour que trois points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ *et* $M_3(x_3, y_3)$ *soient alignés.*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Intersection de deux droites

$$D_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad D_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$: droites confondues,

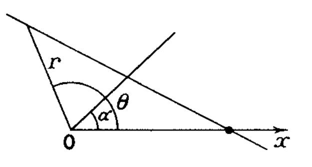
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$: droites parallèles,

$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$: droites sécantes

Condition pour que trois droites soient concourantes :

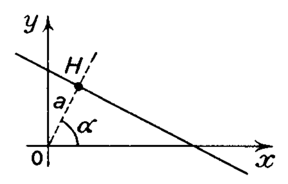
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

DROITE EN COORDONNÉES POLAIRES :
Droite passant par le pôle : $\theta = \alpha$.
Droite ne passant pas par le pôle, mais perpendiculaire à $Ox : r = \frac{a}{\cos\theta}$.



Équation générale:

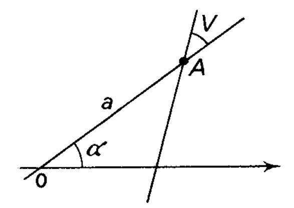
$$\frac{1}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta \text{ ou } r = \frac{a}{\cos(\theta - \alpha)}$$



a = distance de l'origine à la droite;
α = angle de la perpendiculaire à la droite avec Ox .

Droite définie par un point $A(a, \alpha)$ et l'angle que forme avec elle le rayon vecteur de A :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\cos(\theta - \alpha) - \frac{\text{cotanV}}{a}\sin(\theta - \alpha).$$



PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES. Axes Orthonormés.

Distance du point $M_1(x_1.y_1)$ à une droite d'équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0 : d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Bissectrices de deux droites d'équations cartésiennes respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$:

$$\frac{a_1x + b_1y + c}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$

Angle de deux droites : $V = (D_1,\ D_2)$

Coefficients directeurs : m_1 et m_2 : $\tan V = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$

$$\text{Droites}\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} : \quad \tan V = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$$

Conditions orthogonalité de deux droites :

$$1 + m_1m_2 = 0, \quad \text{ou} \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Axes obliques d'angle θ

$$d = \frac{(ax_1 + by_1 + c)\sin\theta}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1}\cos\theta} \pm \frac{a_2x + b_2y + c^2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2}\cos\theta} = 0$$

$$\tan V = \frac{(m_2 - m_1)\sin\theta}{1 + m_2m_1 + (m_1 + m_2)\cos\theta}$$

$$\tan V = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)\sin\theta}{a_1a_2 + b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta}$$

$$1 + m_1m_2 + (m_1 + m_2)\cos\theta = 0$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta = 0$$

Droite passant par 2 points (r_1, θ_1) ; (r_2, θ_2) :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} & \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{1}{r_1} & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \frac{1}{r_2} & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

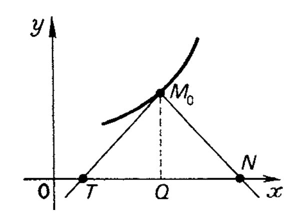
6.3.3 Courbes d'équations y = f(x), avec f dérivable

TANGENTE EN $M_0[x_0, y_0 = f(x_0)]$.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

NORMALE EN M_0 (AXES ORTHONORMÉS) $[x_0, y_0 = f(x_0)]$, si $f'(x_0) \neq 0$.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad \text{On pose } y_0' = f'(x_0).$$



Tangente : $MT = \frac{y_0\sqrt{1+y_0'}}{y'}$

Normale : $MN = y_0\sqrt{1+y_0'}$

CONCAVITÉ ET INFLEXIONS AU POINT $(x_0\, y_0)$.

On pose $y_0'' = f''(x_0)$.

$y_0'' > 0$,		concavite vers les y positifs;
$y_0'' < 0$,		concavite vers les y negatifs ;
$y_0'' = 0$	$y_0''' \neq 0$,	point d´inflexion

On pose $y_0^{(i)} = f^{(i)}(x_0)$.

$$\begin{array}{c} y_0'' = y_0''' = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \\ y^{(n)}(0) \neq 0 \end{array} \begin{cases} n \text{ pair} & \text{point d´inflexion} \\ n \text{ impair} & \begin{cases} y_0^{(n)} > 0 \text{ concavite vers les } y \text{ positifs,} \\ y_0^{(n)} < 0 \text{ concavite vers les } y \text{ negatifs.} \end{cases} \end{cases}$$

ASYMPTOTES.

$$y = mx + p, \quad \text{avec } m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad p = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

si ces limites sont finies.

Utiliser de préférence les développements limités de $\frac{f(x)}{x}$.

6.3.4 Courbes définies paramétriquement

$x = f(t), y = g(t)$, avec f et g régulières sur leur intervalle de définition.

$$\overrightarrow{OM} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} = \overrightarrow{U(t)}.$$

Notations :

$$\overrightarrow{U_0^{(i)}} = \overrightarrow{U^{(i)}}(t_0)$$
$$x_0^{(i)} = f^{(i)}(t_0)$$
$$y_0^{(i)} = g^{(i)}(t_0)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{U(t)} - \overrightarrow{U(t_0)} = (t-t_0)\overrightarrow{U_0'} + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\overrightarrow{U_0''} + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left(\overrightarrow{U_0^{(n)}} + \overrightarrow{\varepsilon_n}\right).$$

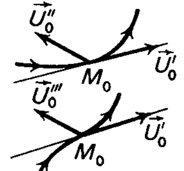
TANGENTE EN $M_0(t_0)$.

$$\overrightarrow{U_0'} \neq \vec{O}, \quad \frac{x-x_0}{x_0'} = \frac{y-y_0}{y_0'} \quad \left(\text{coefficient directeur } m = \frac{y'}{x'}\right)$$

$$\vec{U}_0' = \vec{U}_0^n = \ldots \vec{U}_0^{(n-1)} = \vec{O},\ \vec{U}_0^{(n)} \neq \vec{O} \quad \frac{x-x_0}{x_0^{(n)}} = \frac{y-y_0}{y_0^{(n)}}$$

NORMALE EN M_0 (axes orthonormés).

$$\overrightarrow{U_0'} \neq \vec{O} : \quad x_0'(x-x_0) + y_0'(y-y_0) = 0.$$



CONCAVITÉ EN UN POINT ORDINAIRE (c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{U_0'} \neq \vec{O}$).

$\overrightarrow{U_0'} \wedge \overrightarrow{U_0''} \neq \vec{O}$: courbe du cote de $\overrightarrow{U_0''}$ par rapport a la tangente.

$\overrightarrow{U_0'} \wedge \overrightarrow{U_0''} = \vec{O}$, $\overrightarrow{U_0'} \wedge \overrightarrow{U_0'''} \neq \vec{O}$: inflexion.

Pratiquement : inflexions données par,

$$x'y'' - y'x'' = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0\left(m = \frac{y'}{x'}\right).$$

N. B. — L'équation de $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$ admet aussi des solutions en t correspondant à des points à l'infini.

POINT STATIONNAIRE ($\overrightarrow{U_0'} = \vec{O}$ soit $x_0' = y_0' = 0$).

$$\overrightarrow{U_0''} \neq \vec{O}, \qquad \overrightarrow{U_0''} \wedge \overrightarrow{U_0'''} \neq \vec{O} :$$

rebroussement de première espèce.

$$\overrightarrow{U_0''} \neq \vec{O}, \qquad \overrightarrow{U_0''} \wedge \overrightarrow{U_0'''} \neq \vec{O}, \qquad \overrightarrow{U_0''} \wedge \overrightarrow{U_0^{(4)}} \neq \vec{O} :$$

rebroussement de deuxième espèce.

Généralement : $\vec{U}_0^{(p)}$ premier vecteur dérivée non nul.

$\vec{U}_0^{(q)}$ premier vecteur non nul et non colinéaire à $\vec{U}_0^{(p)}$

p impair,	q pair,	apparence ordinaire;
p impair,	q impair,	inflexion;
p pair,	q impair,	rebroussement de première espèce ;
p pair,	q pair,	rebroussement de deuxième espèce.

Points *doubles.*

$$\begin{cases} f(t_1) = f(t_2), \\ g(t_1) = g(t_2), \end{cases}$$ l'une des équations peut être remplacée par

$$\frac{f(t_1)}{g(t_1)} = \frac{f(t_2)}{g(t_2)}.$$

$t_1 \neq t_2$, ou $t_1 \neq t_2 + T$ (T : période commune de f et g).

6.3.5 Courbes algébriques f(x, y) = 0

Équation implicite

POINT ORDINAIRE M_0 (x_0, y_0) appartenant à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

Tangente : $(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} = 0$.

Normale : $\dfrac{x - x_0}{f'_{x_0}} = \dfrac{y - y_0}{f'_{y_0}}$.

N. B. — Ces équations sont valables pour une courbe non algébrique d'équation non résolue $f(x, y) = 0$.

POINT MULTIPLE.

Point de multiplicité p si toutes les dérivées d'ordre $p - 1$ (et d'ordre inférieur) sont nulles en ce point.

Point à l'origine des coordonnées :

$$f(x, y) \equiv \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \cdots + \varphi_p(x, y) = 0$$

(φ_k, polynôme homogène d'ordre k).

L'origine est un point de multiplicité p.

Faisceau des tangentes en O : $\varphi_p(x, y) = 0$.

ASYMPTOTES : $f(x, y) \equiv \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \cdots$.

Directions asymptotiques : $\varphi_n(x, y) = 0$.

Asymptotes parallèles à Oy : Leurs abscisses annulent le coefficient de la plus haute puissance de y dans $f(x, y)$.

Asymptotes parallèles à Ox : Leurs ordonnées annulent le coefficient de la plus haute puissance de x dans $f(x, y)$.

Asymptotes obliques : $y = mx + p$,

avec $\varphi_n(1, m) = 0$ et p annulant le coefficient de la plus haute puissance de x dans $f(x, mx + p)$.

6.4 Propriétés métriques des courbes planes

On se place dans un repère orthonormé.
Soit *C*, une courbe plane régulière paramétrée (au moins localement autour du réel t_0) par le réel *t*. Cette courbe est décrite par l'ensemble des points $M(t)$. On définit l'abscisse curviligne d'origine t_0 de cette courbe, notée *s*, par :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t.$$

VECTEUR TANGENT UNITAIRE $\vec{t}$.

$$(\overrightarrow{Ox}, \vec{t}) = \alpha \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}s \cos\alpha, \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \sin\alpha. \end{cases}$$

En coordonnées polaires :

$$(\overrightarrow{Ox}, \vec{r}) = 0, \quad (\vec{r}, \vec{t}) = V \quad \begin{cases} \mathrm{d}r = \mathrm{d}s \ \cos V, \\ r\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}s \ \sin V. \end{cases}$$

VECTEUR NORMAL UNITAIRE $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}\alpha}$$

$\vec{v}$ se déduit de $\vec{t}$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$: $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\alpha} = -\vec{t}$.

RAYON DE COURBURE ALGÉBRIQUE ρ :

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{v}}{\rho}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\vec{t}}{\rho}.$$

CENTRE DE COURBURE *C*.

$$\overrightarrow{MC} = R\vec{n} = \rho\vec{v},$$

$$\begin{cases} X = x - \rho\sin\alpha = x - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}, \\ Y = y + \rho\cos\alpha = y + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} \end{cases}$$

DÉTERMINATION PRATIQUE DE R ET C.

Courbe $y = f(x)$:

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}, \qquad C \begin{cases} X = x - y' \dfrac{1 + y'^2}{y''}, \\ Y = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}. \end{cases}$$

Courbe $\begin{matrix} x = f(t) \\ Y = g(t) \end{matrix}$:

$$R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}, \qquad C \begin{cases} X = x - y' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, \\ y = y + x' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}. \end{cases}$$

Courbe $r = f(\theta) : R = \dfrac{\left(r^2 + r'^2\right)^{2/3}}{\left|r^2 + 2r'^2 - rr''\right|}$.

Courbe enveloppe de $x \cos\theta + y \sin\theta - p(\theta) = 0$:

$$R = \left|p + p''(\theta)\right|, \quad \overline{MC} = -\left(p + p''\right);$$

$\overline{MC}$ = projection de R sur r; $(\overrightarrow{Ox}, \vec{r}) = \theta$.

Courbe passant par l'origine et tangente à Ox :

$$R = \frac{1}{y''_0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2y},$$

Courbe passant par l'origine et tangente à Oy :

$$R = \lim_{x \to 0} \frac{y^2}{2x}.$$

LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE :

Elle est définie par $L = \int_a^b \mathrm{d}s$.

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \;; \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

En représentation paramétrique :

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

6.5 Courbes en coordonnées polaires r = f (θ)

ÉQUATIONS PARTICULIÈRES

Droite : $\dfrac{1}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$ ou $\dfrac{1}{r} = A\cos(\theta - \alpha)$,

$\theta = \theta_0$: droite passant par le pôle.

Cercle passant par le pôle :

$$r = a\cos\theta + b\sin\theta \quad \text{ou} \quad r = A\cos(\theta - \alpha).$$

Cercle quelconque : $r^2 - 2r(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0$.

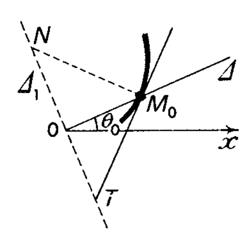
Conique de foyer au pôle :

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta} \quad (\text{axe focal } Ox;\ e, \text{excentricité})$$

ou

$$\frac{1}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta + c \quad (\text{axe focal quelconque})$$

axe focal quelconque, directrice : $\dfrac{1}{r} a\cos\theta + b\sin\theta$.



Tangente au point $(r_0\theta_0)$:

$$V = (r, MT) \qquad \tan V = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r'}.$$

Équation :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_0}\cos(\theta - \theta_0) + \left(\frac{1}{r}\right)'_{\theta_0} \sin(\theta - \theta_0).$$

Normale au point $(r_0\theta_0)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r_0}\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{r'_{\theta_0}}\sin(\theta - \theta_0); \quad \text{sous-normale } \overline{ON} = r'_{\theta_0}$$

Concavité et inflexions.

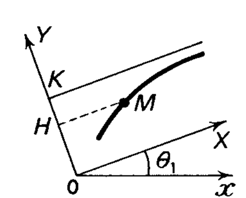
Concavité vers le pôle :

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right] > 0, \quad \text{ou} \quad r^2 + 2r'^2 - rr'' > 0 \cdot$$

Inflexions : $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = 0, \quad \text{ou} \quad r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0,$

ou encore $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0, \qquad \alpha = \theta + V = (Ox, MT).$

Branches infinies (non spirales).



$$\overline{OK} = \lim_{\theta \to \theta_1} \overline{OH} = \lim_{\theta \to \theta_1} r\sin(\theta - \theta_1)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)'_{\theta_1}} = \left(-\frac{r^2}{r'}\right)_{\theta=\theta_1}$$

mesuré sur $OY\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)$.

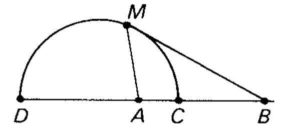
Longueur d'un arc de courbe en coordonnées polaires : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2$.
Homothétie : Si $r = f(\theta)$, la courbe homothétique de rapport K et de centre O est $\rho = Kf(\theta)$.

Inverse : $\rho = \dfrac{K}{f(\theta)}$.

6.6 Problèmes relatifs au cercle

1° LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS DONT LE RAPPORT DES DISTANCES à 2 points fixes est constant et égal à $\dfrac{MB}{MA} = K$.

Cercle de diamètre $[CD]$, C et D étant les points $\overrightarrow{CB} + K\overrightarrow{CA} = \vec{O}$ et $\overrightarrow{DB} - K\overrightarrow{DA} = \vec{O}$.

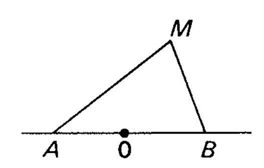


2° LIEU DES POINTS DONT LA SOMME DES CARRÉS des distances à 2 points fixes est constante :

$$MA^2 + MB^2 = K^2.$$

Lieu de M : Cercle de centre O, milieu de $[AB]$ et de rayon

$$R^2 = \frac{K^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

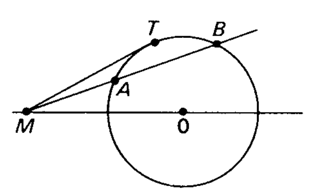


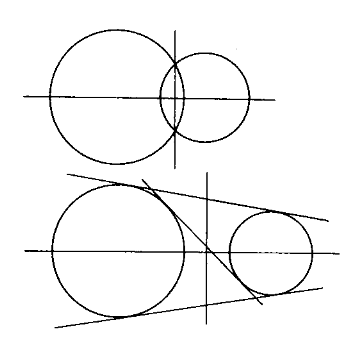
3° PUISSANCE D'UN POINT M PAR RAPPORT À UN CERCLE :

Produit $P = \overline{MA}.\overline{MB}$ pour un point donné M et un cercle donné de rayon R.

$$P = D^2 - R^2; \quad D = OM,$$

$$P = \overline{MT}^2.$$





4° Axe radical de 2 cercles : Lieu des points ayant même puissance par rapport aux 2 cercles. C'est une droite, lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes égales aux 2 cercles. Si les 2 cercles se coupent, c'est la corde commune.
Si les cercles ne se coupent pas, c'est la droite qui joint les milieux des tangentes communes, limitées aux points de contact.

5° Centre radical : Point de rencontre des axes radicaux de 3 cercles. Point d'où l'on peut mener 6 tangentes égales aux 3 cercles. Centre du cercle orthogonal aux 3 cercles.

Relations analytiques dans le cercle

Équations paramétriques.

Centre (a, b), rayon R. M (x, y) est un point de ce cercle :

$$\begin{cases} x = a + R\cos\theta = a + R\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = b + R\sin\theta = b + R\dfrac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

Le paramètre est $\theta \in [0,\ 2\pi]$ ou $t \in \mathbb{R}$

Tangente en un point de paramètre θ :

$$(x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta - R = 0,$$

ou

$$x\cos\theta + y\sin\theta - R = 0, \quad \text{si} \quad O \text{ est le centre.}$$

Équation cartésienne.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad \text{si} \quad O \text{ est le centre,}$$

$$\text{ou} \quad f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (R^2 = a^2 + b^2 - c).$$

La courbe d'équation $F(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$;

est un cercle si

$$A = C, \qquad B = 0.$$

Tangente en $M_0(x_0, y_0)$ *au cercle d'équation* $f(x, y) = 0$:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$$

PUISSANCE DE $M_1(x_1, y_1)$, PAR RAPPORT A UN CERCLE :

Cercle d'équation $F(x, y) \equiv A(x^2 + y^2) - 2Bx - 2Cy + D = 0,$

ou $f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$
La puissance de M_1 par rapport à ce cercle vaut :

$$-\ (M_1) = \frac{F(x_1, y_1)}{A} = f(x_1, y_1).$$

AXE RADICAL DE DEUX CERCLES (MÊME NOTATION) :

$$\frac{F(x, y)}{A} - \frac{F_1(x, y)}{A_1} = 0, \quad \text{ou} \quad F(x, y) - F_1(x, y) = 0,$$

ou $\quad 2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y - (c - c_1) = 0.$

ANGLE DE DEUX CERCLES :
V, angle des rayons aboutissant à un point commun.

$$\cos V = \frac{2aa_1 + 2bb_1 - c - c_1}{2RR_1}$$

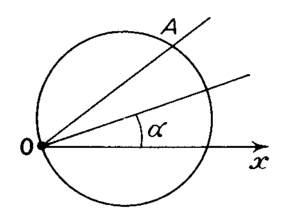
CERCLES ORTHOGONAUX :

$$2aa_1 + 2bb_1 - c - c_1 = 0.$$

Cercles en coordonnées polaires.

Cercle passant par le pôle : $r = d\cos(\theta - \alpha)$, d = diamètre du cercle ; α = angle du diamètre passant par le pôle avec l'axe polaire.

Si $\quad \alpha = 0 : r = d\cos\theta.$



Cercle quelconque, rayon R :

$$r^2 + a^2 - 2\,ar\cos(\theta - \alpha) = R^2,$$

(a, α coordonnées polaires du centre).

6.7 Coniques

Les coniques forment une famille de courbes planes résultant de l'intersection d'un plan avec un cône de révolution. On se place donc dans le plan rapporté à un repère orthonormé R_2 de centre $O(0, 0)$. On considère une droite (d) et un point F qui n'appartient pas à cette droite. Soit e, un réel strictement positif.
DÉFINITION. — On appelle *conique de droite directrice* (d)*, de foyer F et d'excentricité e,* l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

$$\frac{MF}{ME} = e,$$

où ME désigne la distance de M à la droite (d).
On distingue différents types de coniques suivant les valeurs de e
– Si $0 < e < 1$, l'ensemble des points M est *une ellipse.*
– Si $e = 1$, l'ensemble des points M est *une parabole.*
– Si $e > 1$, l'ensemble des points M est *une hyperbole.*
– Si F est sur (d), on obtient des coniques dégénérées (se réduisant à des droites ou des points).

Point de vue analytique

Les coniques sont des courbes planes algébriques du second ordre, c'est-à-dire les courbes planes décrites par $M(x, y)$, où x et y résolvent l'équation polynômiale du second degré :

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

où A, B, C, désignent des réels non tous nuls, et D, E et F des réels quelconques. Le genre de la conique se détermine à l'aide de la règle suivante :

– Si $B^2 - AC > 0$, la conique est du genre hyperbole.

– Si $B^2 - AC = 0$, la conique est du genre parabole.

– Si $B^2 - AC < 0$, la conique est du genre ellipse.
En général, on recherche l'équation réduite de la conique. En effectuant une rotation et/ou une translation du repère R_2, il est toujours possible de faire disparaître des termes de l'équation générale du second degré. Voici la méthode :
1° On fait subir au repère une rotation d'angle θ, bien choisi pour que le terme B disparaisse dans l'équation générale. On vient donc de voir que l'on peut toujours ramener l'équation de la conique à une équation de la forme

$Ax^2 + Cy^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$.

2° Si $A \neq 0$, on fait ensuite subir au nouveau repère une translation suivant l'axe des x pour faire disparaître le terme D_1. Si $C \neq 0$, on fait subir au nouveau repère une translation suivant l'axe des y pour faire disparaître le terme E_1.

Dans le cas d'une conique à centre (ellipse ou hyperbole), on fait subir au repère une translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$, où Ω est le centre de la conique, dont les coordonnées (x_0, y_0) sont solutions du système $f'_x(x_0, y_0) = 0$ et $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Dans la section Quadriques, une étude plus systématique des courbes du second degré, à l'aide des matrices, est proposée. Elle s'adapte sans problème à l'étude des coniques.

On récapitule à présent les différents cas de figure :

– Si $A = 0$ ou $C = 0$, on peut ramener l'équation générale de la conique à une équation de la forme $x^2 =$ constante (droites parallèles) ou $y = px^2$ (parabole), avec p réel ou à une équation obtenue à partir des équations précédentes en permutant les rôles joués par x et y.

– Si $AC > 0$, les techniques précédentes ramènent l'équation à :

$$\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\beta}\right)^2 = \gamma,$$

(X, Y) désignant les coordonnées d'un point de la conique dans le nouveau repère, α, β étant deux réels, et γ étant –1, 0 ou 1.

– Si $\gamma = -1$, l'ensemble des points (X, Y) est vide. Si $\gamma = 0$, la conique est réduite à un point.

– Si $\gamma = 1$, on obtient l'équation cartésienne réduite d'une ellipse.

– Si $AC < 0$, les techniques précédentes ramènent l'équation à :

$$\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{Y}{\beta}\right)^2 = \gamma,$$

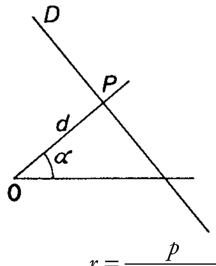
(X, Y) désignant les coordonnées d'un point de la conique dans le nouveau repère, α, β étant deux réels, et γ étant –1, 0 ou 1.

Si $\gamma = 0$, la conique est réduite à deux droites sécantes. Sinon, on obtient l'équation réduite d'une hyperbole.

6.7.1 Coniques en coordonnées polaires

Conique admettant le point O comme foyer et la droite D comme directrice.

(α, d) coordonnées polaires de P.



Excentricité $e = \frac{c}{a}$; $p = ed$.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}.$$

Si l'axe polaire est confondu avec l'axe focal :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad \text{ou} \quad r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \quad \text{(suivant orientation axe focal)}$$

p = longueur de la moitié de la corde focale parallèle à D.

$$d = \left|\frac{a^2}{c} - c\right| = \frac{b^2}{c}, \qquad p = ed = \frac{c}{a}.\frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{a}.$$

Si la conique est une parabole, $e = 1$, et

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} = \frac{2\cos^2\theta/2}{p}.$$

6.7.2 Étude spéciale de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Équations paramétriques

$$t = tan\frac{\theta}{2}. \quad \begin{cases} x = a\cos\theta = a\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi] \text{ ou } t \in \mathbb{R} \\ y = b\sin\theta = b\dfrac{2t}{1 + t^2}. \end{cases}$$

TANGENTE AU POINT ($x_0\ y_0$) DE L'ELLIPSE.

On appelle θ_0 le paramétre correspondant à ce point sur l'ellipse.

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0, \quad \text{ou} \quad \frac{x\cos\theta_0}{a}+\frac{y\sin\theta_0}{b}-1=0.$$

Équation donnant les coefficients directeurs des tangentes issues de (x_1, y_1) :

$$m^2\left(a^2-x_1^2\right)+2mx_1y_1+b^2-y_1^2=0.$$

NORMALES :

Normale au point (x_0, y_0) :

$$\frac{a^2x}{x_0}-\frac{b^2y}{y_0}-c^2=0 \quad \text{avec} \quad c^2=a^2-b^2.$$

pieds des normales menées du point (x_1, y_1) *à l'ellipse (hyperbole d'Apollonius)* :

$$\frac{x-x_1}{\frac{x}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y}{b^2}} \quad \text{ou} \quad c^2xy+b^2y_1x-a^2x_1y=0.$$

Développée (enveloppe des normales) :

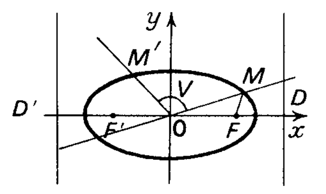
$$(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+27a^2b^2c^4x^2y^2=0,$$
$$=(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}-c^{4/3}=0.$$

Équations paramétriques de la développée :

$$x=\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad y=-\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi[$$

Théorèmes d'Apollonius :

$$OM^2+OM'^2=a^2+b^2$$
$$OM.OM'\sin V=ab$$



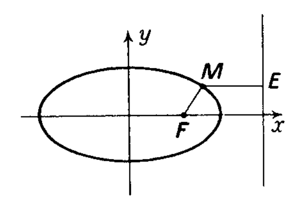
FOYERS ET DIRECTRICES :

Foyers ($x = \pm c, y = 0$). Directrices : $x = \pm \dfrac{a^2}{c}$, $\quad c^2 = a^2 - b^2$.

Rayons focaux : $MF = a - \frac{cx}{a}$, $\quad MF' = a + \frac{cx}{a}$.

CERCLE ORTHOPTIQUE OU CERCLE DE MONGE (lieu géométrique des points tels que les tangentes issues de ce point sont orthogonales) : $x^2 + y^2 - \left(a^2 + b^2\right) = 0$.

ÉQUATION FOCALE :

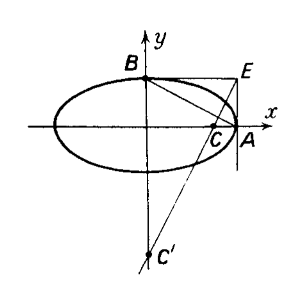


Origine à l'un des foyers. Axe *Ox* grand axe de l'ellipse :

$$MF = \frac{c}{a} ME, \qquad \frac{c}{a} = e < 1 \quad \text{excentricité}$$

$$(x - c)^2 + y^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right),$$

$$(x + c)^2 + y^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2$$



CERCLES OSCULATEURS AUX SOMMETS :

$$x^2 + y^2 - 2\frac{c^2}{a}x + a^2 - 2b^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2\frac{c^2}{a}y + b^2 - 2a^2 = 0.$$

On rapelle qu'un cercle osculateur est un cercle qui approxime une courbe régulière autour d'un point a priori mieux que ne le point la tangente elle-même.
Construction. De *E* on abaisse la perpendiculaire sur (*AB*).

Longueur du rayon de courbure en $A = AC = \dfrac{b^2}{a}$.

Longueur du rayon de courbure en $B = BC' = \dfrac{a^2}{b}$.

ÉQUATION POLAIRE :

Foyer au pôle. Axe polaire = axe focal orienté du centre vers la directrice :

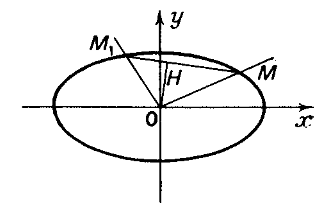
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \frac{c}{a} < 1.$$

Pôle au centre. Axe polaire = axe focal : $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$.

Propriétés géométriques élémentaires de l'ellipse

Si 2 demi-diamètres, $[OM]$, $[OM_1]$, sont perpendiculaires, on a

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{OH^2}.$$

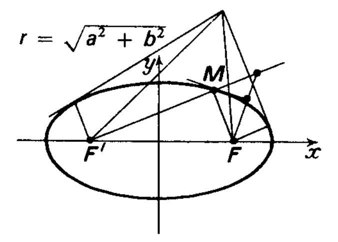



Donc OH constant.

L'enveloppe de $[MM_1]$, est un cercle de centre O, de rayon OH.

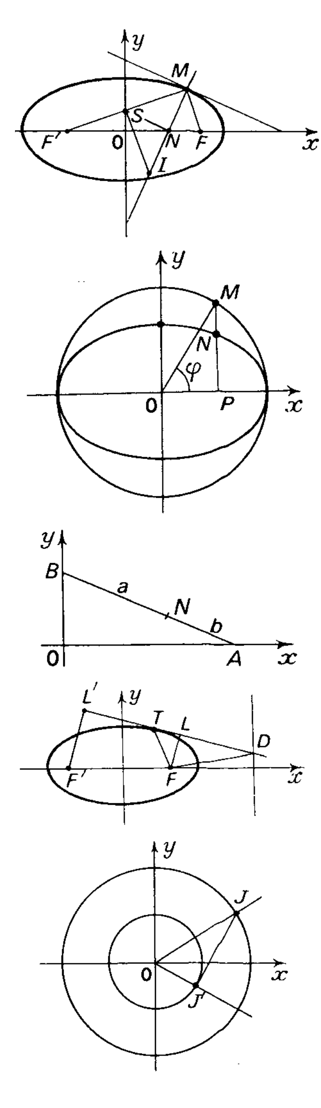
Tangente et normale : bissectrices de l'angle formé par les rayons vecteurs.

Théorème de Poncelet. Les angles formés par les tangentes issues d'un point et les droites joignant ce point aux foyers sont égaux.



Cercle orthoptique ou cercle de Monge : Lieu des points d'où l'on peut mener 2 tangentes rectangulaires à l'ellipse.

Construction du centre de courbure et du cercle osculateur en un point quelconque.



La normale en M coupe l'axe (FF') en N. Perpendiculaire à (MN) jusqu'en S, point de rencontre avec (MF'). Perpendiculaire en S à (MF'). rencontre (MN) en I, centre de courbure.

Ellipse projection du cercle

$$\frac{NP}{MP} = Cte = \cos\varphi = \frac{b}{a}.$$

a, b, axes de l'ellipse.
φ = angle du plan du cercle et de l'ellipse projection.

Application. — Lieu du point N d'un segment de longueur constante dont les extrémités décrivent 2 droites rectangulaires. Construction par points d'une ellipse dont on connaît les 2 axes.
Sur une bande de papier on porte les longueurs a et b ; on fait décrire aux extrémités du segment $(a + b)$, les 2 axes le point N décrit l'ellipse de demi-axes a et b.
— Le produit des distances des foyers à une tangente est constant :

$$FL.F'L' = a^2 - c^2 = b^2.$$

— L'angle sous lequel on voit du foyer la portion de tangente limitée au point de contact et à la directrice, est droit : $\widehat{TFD} = 90°$.
Construction d'une ellipse de demiaxes a et b.
On trace 2 cercles concentriques de rayons $(a+b)$ et $(a-b)$, 2 rayons issus de O et symétriques à Ox, coupent $R(a+b)$ et $r(a-b)$ en J et J'.
Le milieu de $[JJ']$ décrit l'ellipse de demi-axes a et b.

6.7.3 Étude spéciale de l'hyperbole

ÉQUATIONS : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,\theta = \dfrac{a}{\cos\varphi} = a\dfrac{1+t^2}{1-t^2}, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,\theta = b\tan\varphi = b\dfrac{2t}{1-t^2}. \end{cases} \qquad \left(t=\tan\dfrac{\varphi}{2}=\mathrm{th}\dfrac{\theta}{2}\right)$$

avec $t \in \left]-1,\ 1\right[$, $\theta \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Équation polaire, centre au pôle : $r^2=\dfrac{1}{\cos 2\theta}$.

Tangente au point $(x_0,\ y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0,$$

ou

$$\frac{x}{a}\mathrm{ch}\,\theta-\frac{y}{b}\mathrm{sh}\,\theta-1=0=\frac{x}{a\cos\varphi}-\frac{y}{b}\tan\varphi-1=0,$$

ou

$$\frac{x}{a}\left(1+t^2\right)-\frac{2ty}{b}-\left(1-t^2\right)=0.$$

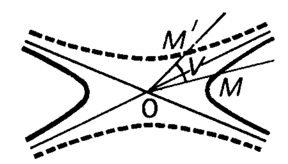
Normale au point (x_0,y_0) :

$$\frac{a^2x}{x_0}+\frac{b^2y}{y_0}-c^2=0.$$

Pieds des normales menées de (x_1,y_1) :

sur *l'hyperbole d'Apollonius*, $\dfrac{x-x_1}{x/a^2}=\dfrac{y-y_1}{-y/b^2}$.

Rayon de courbure : $R = \frac{1}{ab}\left(a^2 \operatorname{sh}^2\theta + b^2 \operatorname{ch}^2\theta\right)^{3/2}$.



Théorèmes d'Apollonius.

$$OM^2 - OM'^2 = a^2 - b^2,$$
$$OM.OM' \sin V = ab,$$
$$V = \text{angle}\,(OM, OM').$$

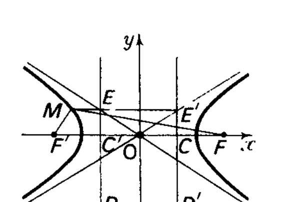
CERCLE ORTHOPTIQUE :

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \;\;;\;\; \text{réel si } a > b.$$

FOYERS ET DIRECTRICES :

Coordonnées des foyers :

$$\begin{cases} OF = c \\ OF' = -c \end{cases} \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$



Directrices

$$\begin{cases} OC = \dfrac{a^2}{c} \\ OC' = -\dfrac{a^2}{c}. \end{cases}$$

Rayons vecteurs :

M sur la branche de gauche.

$$MF = a - \frac{cx}{a}, \qquad MF' = -\frac{cx}{a} - a, \qquad MF - MF' = 2a.$$

Excentricité :

$$\frac{MF'}{ME} = \frac{MF}{ME'} = \frac{c}{a} > 1.$$

ÉQUATION FOCALE (origine aux foyers) :

$$(x-c)^2+y^2=\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2,$$

$$(x+c)^2+y^2=\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2.$$

HYPERBOLE ÉQUILATÈRE : $a=b,\ c=a\sqrt{2}$.

Rapportée à ses axes: $x^2-y^2=a^2$.

Rapportée à ses asymptotes : $xy=a^2/2$.
Équation polaire: même formule que l'ellipse, avec $e>1$.

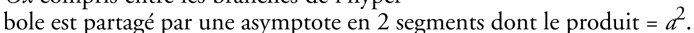
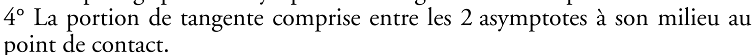
Propriétés géométriques de l'hyperbole

1° Sécante coupant l'hyperbole en M et N, les asymptotes en P et Q.
On a

$$PM=NQ.$$

2° Un segment de droite perpendiculaire à l'axe Ox, est tel que :

$$P_1M_1\times P_1N_1=b^2.$$

3° Un segment de droite parallèle à l'axe Ox compris entre les branches de l'hyper-

bole est partagé par une asymptote en 2 segments dont le produit = a^2.

4° La portion de tangente comprise entre les 2 asymptotes à son milieu au point de contact.
5° Tous les triangles formés par les 2 asymptotes et une tangente ont même surface = ab.
6° La projection de la normale sur les rayons vecteurs est constante.

6.7.4 Étude spéciale de la parabole

ÉQUATION :

$$y^2=2px\ ; \qquad p=\text{paramètre}$$
$$=\text{distance du foyer à la directrice.}$$

Équations paramétriques $\begin{cases} x = \dfrac{p}{2}\text{cotan}^2\theta, \\ y = p\,\text{cotan}\,\theta, \end{cases}$

θ, angle de la tangente avec O_x appartenant à $]0, \pi[$.

TANGENTE :

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Coefficients directeurs des tangentes menées du point (x_1, y_1) :

$$p - 2m(y_1 - mx_1) = 0.$$

NORMALE

Normale en $(x_0, y_0)\dfrac{x - x_0}{-p} = \dfrac{y - y_0}{y_0}$ ou $xy_0 + py - y_0(x_0 + p) = 0$.

Pieds des normales menées de $M_1(x_1, y_1)$:

les ordonnées (y', y'', y''') sont solutions de

$$y^3 + 2\,py(\,p - x_1) - 2\,p^2 y_1 = 0,$$

$$y' + y'' + y''' = 0.$$

Développée :

$$pu^3 + 2v^2(\,pu + w) = 0, \text{ ou } \; 27\,py^2 - 8(x - p)^3 = 0.$$

Hyperbole d'Apollonius : $(x_0 - x)\dfrac{y}{p} + (y_0 - y) = 0$

FOYERS ET DIRECTRICES

Foyer, coordonnée $\dfrac{p}{2}$.

Directrice : $x = -\dfrac{p}{2}$ = lieu des sommets des angles droits circonscrits.

Équation focale : $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2.$

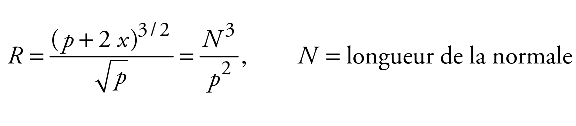
Excentricité : $e = 1$.

Rayon vecteur : $MF = x + \frac{p}{2}$.

Sous-tangente : $TH = 2x$.

Sous-normale : $HN = p$.

Rayon de courbure :



$$R = \frac{(p + 2x)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{N^3}{p^2}, \qquad N = \text{longueur de la normale}$$

$$= \frac{p}{\sin^3 \varphi}, \qquad \varphi = \text{angle de la tangente et de l'axe } Ox.$$

Rayon de courbure au sommet : p.

Équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} = \frac{p}{2\cos^2 \frac{\theta}{2}}, \qquad \text{pôle } F \text{ et axe polaire} = Ox.$$

Propriétés géométriques

1° La tangente au sommet partage la tangente en M, limitée à M et à l'axe Ox, en 2 parties égales.
2° La parabole est l'enveloppe du côté d'un angle droit dont l'autre côté passe par un point fixe F et le sommet de l'angle droit décrit une droite D (foyer F, tangente au sommet D).
3° La surface comprise entre l'ordonnée du point M, l'axe des x et la parabole est égale aux 2/3 de l'aire du rectangle des coordonnées de M (théorème d'Archimède).
4° Le lieu des orthocentres des triangles circonscrits à la parabole est la directrice.
5° Le lieu des foyers des paraboles inscrites à un triangle est le cercle circonscrit à ce triangle.

6.8 Géométrie dans l'espace

Transformation de coordonnées

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux repères de $\mathbb{R}^3$.

$$M\begin{cases} x \\ y \text{ dans } \mathscr{C}, \\ z \end{cases} \quad M'\begin{cases} x' \\ y' \text{ dans } \mathscr{C}', \\ z' \end{cases} \quad \text{origine } O' \text{ de } \mathscr{C}'\begin{cases} x_0 \\ y_0 \text{ dans } \mathscr{C}\ ; \\ z_0 \end{cases}$$

les vecteurs unitaires de $\mathscr{C}'$ ont pour composantes dans $\mathscr{C}$ les vecteurs colonnes de la matrice

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y = y_0 + b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z = z_0 + c_1x' + c_2y' + c_3z', \end{cases}$$

ou, sous forme matricielle, avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$: $X = X_0 + PX'$,

et, inversement, $X' = P^{-1}(X - X_0)$, car P doit être inversible pour être la matrice d'un changement de base.

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tous deux orthonormés directs : P est une matrice orthogonale :

$$P^{-1} = P', \quad |P| = 1, \quad \text{si } \mathscr{C} \text{ et } \mathscr{C}' \text{ sont directs,}$$

$$\text{soit} \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \\ \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0, \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0, \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \\ \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, \end{cases}$$

P' est ici la transposée de P.

Angles d'Euler : $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ orthonormés directs, de même origine.
$\mathscr{C}_1$ déduit de $\mathscr{C}$ par rotation d'angle ψ autour de Oz : $X = P_1 X_1$,
$\mathscr{C}_2$ déduit de $\mathscr{C}_1$, par rotation d'angle θ autour de Ox_1 : $X_1 = P_2 X_2$,
$\mathscr{C}'$ déduit de $\mathscr{C}_2$ par rotation d'angle φ autour de $\mathrm{O}z_2$: $X_2 = P_3 X'$.
$X = P_1 P_2 P_3 X'$, avec :

$$P_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.8.1 Le plan dans R³

■ Équations paramétriques

Plan passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\overrightarrow{OA'}(\alpha',\beta',\gamma')$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \rho\overrightarrow{OA} + \rho'\overrightarrow{OA'} \begin{cases} x = x_0 + \rho\alpha + \rho'\alpha', \\ y = y_0 + \rho\beta + \rho'\beta'. \\ z = z_0 + \rho\gamma + \rho'\gamma'. \end{cases}$$

ρ et ρ' sont les paramètres. Ils appartiennent à $\mathbb{R}$.
Si $M(x, y, z)$ appartient au plan passant par M_1, M_2 et M_3, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3}{1 + \lambda + \mu}.$$

Équations cartésiennes

$$ax + by + cz + d = 0\,.$$

Vecteur normal : $\vec{n}(a,b,c)$.

Plan passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire à $(a,\ b,\ c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Plan passant par M_0 et parallèle aux vecteurs $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ et $(\alpha',\ \beta',\ \gamma')$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Plan défini par trois points, M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0$, si $M_1(a,\ 0,\ 0)$, $M_2(0,\ b,\ 0)$, $M_3(0,\ 0,\ c)$.

Systèmes de plans

Intersection des plans :

$$P_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \qquad P_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}, \quad \text{plans confondus.}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \neq \frac{d_2}{d_1}, \quad \text{plans parallèles.}$$

Dans tous les autres cas, droite commune à distance finie.

Propriétés métriques (axes orthonormés)

Distance de $M_1(x_1, y_1, z_1)$ au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

$$\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Plans bissecteurs de P_1 *et* P_2 *d'équations respectives* $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ *et* $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = 0.$$

Angle de deux plans P_1 *et* P_2 :

$$\cos V = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Condition d'orthogonalité :

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

6.8.2 La droite dans R^3

Équations paramétriques

Tout point $M(x, y, z)$ appartenant à la droite passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$, parallèle à $\overrightarrow{OA}(\alpha, \beta, \gamma)$ vérifie :

Il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{M_0M} = \rho\overrightarrow{OA}$ ou $\begin{cases} x = x_0 + \rho\alpha, \\ y = y_0 + \rho\beta, \\ z = z_0 + \rho\gamma. \end{cases}$

Droite passant par M_1, et M_2.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Équations cartésiennes

Droite passant par M_0, parallèle à $\overrightarrow{OA}(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}.$$

Condition pour que les deux droites d'équations respectives

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1} \quad \text{et} \quad \frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}.$$

1° *Soient coplanaires* :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y_2-y_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ z_2-z_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0.$$

2° *Soient parallèles* :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Intersection de la droite $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ avec le plan

$$ax+by+cz+d=0.$$

1° $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$: un point de rencontre.

2° $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ $\begin{cases} ax_0+by_0+cz_0+d\neq 0 & : \text{droite parallèle au plan ;} \\ ax_0+by_0+cz_0+d=0 & : \text{droite située dans le plan.} \end{cases}$

Angle des 2 *droites* :

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{x-x_2}{\alpha'}=\frac{y-y_2}{\beta'}=\frac{z-z_2}{\gamma'}.$$

$$\cos V=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}{\pm\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)}}.$$

D'où condition pour que 2 droites soient perpendiculaires :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

PERPENDICULAIRE COMMUNE À DEUX DROITES D'ÉQUATIONS RESPECTIVES

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}$$

et

$$\frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2},$$

avec les notations précédentes.

Direction : $\vec{N}(p, q, r)$, où

$$p = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \qquad q = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \qquad r = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Équations :

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Angle de la droite d'équation $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$ *et du plan d'équation* $ax + by + cz + d = 0$.

$$\sin V \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \text{ (axes orthonormés).}$$

Conditions pour que la droite soit perpendiculaire au plan :

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}.$$

Perpendiculaire issue de (x_0, y_0, z_0) au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Plan mené par (x_1, y_1, z_1) perpendiculaire à la droite d'équation

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0.$$

Condition pour que la droite soit parallèle au plan :

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \qquad \text{(axes quelconques).}$$

■ Distance de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à une droite

Droite définie par deux plans P_1, P_2 orthogonaux :

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2,\ d_1 \text{ et } d_2 \text{ distances de } M_0 \text{ à } P_1 \text{ et } P_2.$$

Droite définie par deux plans P_1 et P_2 quelconques :

On se ramène au cas précédent en déterminant un plan P_3 orthogonal à P_1 et contenant la droite.

Droite définie par $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{OA}(a, b, c)$:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$$

$$= \frac{\sqrt{\left[b(z_1 - z_0) - c(y_1 - y_0)\right]^2 + \left[c(x_1 - x_0) - a(z_1 - z_0)\right]^2 + \left[a(y_1 - y_0) - b(x_1 - x_0)\right]^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distance du point (x_0, y_0, z_0) au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$:

$$d = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

6.8.3 Courbes gauches

Une courbe gauche peut être définie par l'intersection de 2 surfaces :

$$(1) \qquad f(x,y,z)=0 \qquad (2) \qquad \varphi(x,y,z)=0.$$

Elle peut être également définie paramétriquement :

$$x=f(t), \qquad y=g(t), \qquad z=h(t),$$
$$\overrightarrow{OM}=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}=\overline{U}(t),$$
$$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{U(t)}-\overrightarrow{U(t_0)},$$
$$=(t-t_0)\overrightarrow{U_0'}+\frac{(t-t_0)^2}{2}\overrightarrow{U_0''}+\cdots+\frac{(t-t_0)^n}{n!}\ \vec{U}_0^{(n)}+\vec{\varepsilon}\ .$$

TANGENTE EN $M_0(t=t_0)$, ou (x_0, y_0, z_0).

$$\overrightarrow{U_0'}\neq 0: \qquad \frac{x-x_0}{x_0'}=\frac{y-y_0}{y_0'}=\frac{z-z_0}{z_0'}\ ;$$

$$\overrightarrow{U_0'}=\overrightarrow{U_0''}=\cdots=\vec{U}_0^{(n-1)}=0, \quad \vec{U}_0^{(n)}\neq 0: \quad \frac{x-x_0}{x_0^{(n)}}=\frac{y-y_0}{y_0^{(n)}}=\frac{z-z_0}{z_0^{(n)}}.$$

Projection de la courbe sur un plan (xOy par exemple). S'obtient en éliminant z entre f et φ .

LONGUEUR DE L'ARC DE COURBE

$x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$, abscisse curviligne : $s=\text{arc}\ \widehat{AM}$, où $A(t_0)$, $M(t)$;

$$\mathrm{d}s=\varepsilon\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t$$

($\varepsilon = \pm 1$ définit l'orientation).

■ Plan normal au point M (x_0, y_0, z_0)

C'est le plan perpendiculaire à la tangente en ce point :

$$\overrightarrow{U_0'}\neq 0: \qquad x_0'(x-x_0)+y_0'(y-y_0)+z_0'(z-z_0)=0.$$

PLAN OSCULATEUR AU POINT (x_0, y_0, z_0) :

Limite du plan passant par la tangente en M et par un point voisin M' quand $M' \to M$.

Équation :

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

■ Normale principale

Normale en M située dans le plan osculateur = intersection du plan osculateur et du plan normal.

■ Binormale

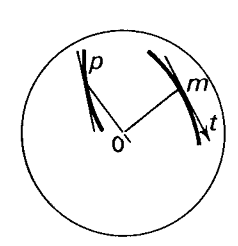
perpendiculaire en M au plan osculateur.

Équation de la binormale en $M(x, y, z)$:

$$\frac{X-x}{y'z''-z'y''} = \frac{Y-y}{z'x''-x'z''} = \frac{Z-z}{x'y''-y'x''}.$$

■ Indicatrice sphérique

Si, par un point O quelconque, on mène des parallèles aux tangentes à une courbe gauche, ces parallèles décrivent sur la sphère de centre O et rayon 1, une courbe appelée indicatrice sphérique. Point m correspondant à M. Plan tangent au cône Om = parallèle au plan osculateur en M. Tangente à l'indicatrice en m = parallèle à la normale principale.



Perpendiculaire Op en O au plan Omt = parallèle à binormale.

Tangente à la courbe décrite par p = parallèle à mt.

■ Courbure et torsion en M

Soit ε l'angle des tangentes MT et $M'T'$ en 2 points voisins ; $\varepsilon \to 0$ avec MM'. La courbure en M est la limite de $\varepsilon/\Delta s$ quand $\Delta s = \text{arc } MM' \to 0$. Rayon de courbure R = inverse de la courbure.

Soit η l'angle des plans osculateurs en M et M', η tendant vers 0 avec MM'. La torsion est la limite du rapport $\eta/\Delta s$ quand $\Delta s \to 0$.
Rayon de torsion T = inverse de la torsion.

Rayon de courbure : $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}$, $\sigma = \text{arc}$ de l'indicatrice :

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{\sum (y'z'' - z'y'')^2}}.$$

Si l'on prend s comme variable :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2.$$

Rayon de torsion : $T = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$, $\mathrm{d}\theta$ = angle de 2 binormales infiniment voisines.
Soit α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale principale ;
α'', β'', γ'' — — — — binormale :

$$\frac{1}{T^2} = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha''}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\beta''}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}s}\right).$$

Formules de Frenet

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = \frac{\beta'}{R}, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s} = \frac{\gamma'}{R};$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha''}{\mathrm{d}s} = \frac{\alpha'}{T}, \quad \frac{\mathrm{d}\beta''}{\mathrm{d}s} = \frac{\beta'}{T}, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}s} = \frac{\gamma'}{T};$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha'}{\mathrm{d}s} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \quad \frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}s} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}s} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T};$$

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha'}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\beta'}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}s}\right)^2.$$

Calcul. — Si x, y, z sont des fonctions de t :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \qquad \beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \qquad \gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

permettent de calculer R et α'.

De même, $\dfrac{d\alpha'}{ds} = \dfrac{d\alpha'}{dt} \cdot \dfrac{dt}{ds}$ permettent de calculer T et α''.

Expression vectorielle des formules de Serret-Frenet

$$\begin{cases} \vec{t} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \\ \vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{dt}}{d\sigma} \\ \vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} \end{cases}$$

$\vec{n}$ (vecteur normal) est dans le plan osculateur et dans la concavité.

σ est l'abscisse curviligne sur l'indicatrice sphérique lieu de μ tel que $\overrightarrow{O\mu} = \vec{t}$.

Rayon R et centre C de courbure.

$$R = \frac{ds}{d\sigma} (> 0), \qquad \text{courbure } C = \frac{1}{R}, \ \overrightarrow{MC} = R\vec{n}.$$

Formules de Frenet.

$$\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{dt}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{R}, \\ \dfrac{\overrightarrow{dn}}{ds} = -\dfrac{\vec{t}}{R} + \dfrac{\vec{b}}{T}, \\ \dfrac{\overrightarrow{db}}{ds} = -\dfrac{\vec{n}}{T}, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{dt}}{ds} = \vec{\Omega} \wedge \vec{t}, \\ \dfrac{\overrightarrow{dn}}{ds} = \vec{\Omega} \wedge \vec{n}, \\ \dfrac{\overrightarrow{db}}{ds} = \vec{\Omega} \wedge \vec{b}, \end{cases}$$

avec $\vec{\Omega} = \dfrac{\vec{t}}{R} + \dfrac{\vec{b}}{T}$

($\vec{\Omega}$, vecteur rotation instantanée).

DÉTERMINATION PRATIQUE DE R, T, C :

Calculer successivement :

$$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}s = \varepsilon\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} \quad \text{(choix arbitraire de } \varepsilon\text{)},$$

$$\vec{t}\begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \\ \beta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \\ \gamma = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \end{cases} \quad \mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\beta, \mathrm{d}\gamma, \mathrm{d}\sigma = \varepsilon\sqrt{\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2 + \mathrm{d}\gamma^2}, \qquad R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}.$$

$$\vec{n}\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\sigma} \\ \beta_1 = \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\sigma} \\ \gamma_1 = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma} \end{cases} \qquad C\begin{cases} X = x + R\alpha_1, \\ Y = y + R\beta_1, \\ Z = z + R\gamma_1 \end{cases} \qquad \vec{b}\begin{cases} \alpha_2 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \\ \beta_2 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \\ \gamma_2 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, \end{cases}$$

$$T = \frac{-\alpha_1}{\dfrac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}s}} = \frac{-\beta_1}{\dfrac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}s}} = \frac{-\gamma_1}{\dfrac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}s}}.$$

Directement, en posant

$$\vec{U}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k},$$

$$R = \frac{\left|\overrightarrow{U'}\right|^3}{\left|\overrightarrow{U'} \wedge \overrightarrow{U''}\right|}, \qquad T = \frac{\left|\overrightarrow{U'} \wedge \overrightarrow{U''}\right|^2}{\left(\overrightarrow{U'},\ \overrightarrow{U''},\ \overrightarrow{U'''}\right)}.$$

6.8.4 Surfaces

■ Représentation paramétrique x = f (u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)

$$\text{Plan tangent} \quad \begin{vmatrix} x - f(u,v) & y - g(u,v) & z - h(u,v) \\ f'_u & g'_u & h'_u \\ f'_v & g'_v & h'_v \end{vmatrix} = 0.$$

■ Équation cartésienne f (x, y, z) = 0

Plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$(x - x_0)f'_{x_0} + (y - y_0)f'_{y_0} + (z - z_0)f'_{z_0} = 0.$$

Normale en M_0 : $\dfrac{x - x_0}{f'_{x_0}} = \dfrac{y - y_0}{f'_{y_0}} = \dfrac{z - z_0}{f'_{z_0}}$ (axes orthonormés).

■ Surfaces réglées

Toute surface qui peut être engendrée par une droite dont la position dépend d'un paramètre

$$\text{Lieu de } (G) \quad \begin{cases} x = a(t)z + p(t) \\ \\ y = b(t)z + q(t), \end{cases} \quad \text{non parallèle à } xOy.$$

Cône directeur : lieu de $\dfrac{x}{a(t)} = \dfrac{y}{b(t)} = \dfrac{z}{1}$.

Surface développable (plan tangent fixe le long de chaque génératrice)

$$a'(t)q'(t) - b'(t)p'(t) = 0 \qquad \forall t.$$

$$\text{Arête de rebroussement} \quad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q \\ z = -\dfrac{p'(t)}{a'(t)} \left(= -\dfrac{q'}{b'} \right). \end{cases}$$

Point central d'une surface réglée non développable (surface gauche).

Le plan mené par G (génératrice) perpendiculaire au plan asymptote relatif à cette génératrice est tangent à la surface en un point ω de G. C'est le *point central.*
Quand G se déplace, le lieu de ω est la *ligne de striction.*

■ Surfaces de révolution (axes orthonormés)

FORME GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION :

$f(x^2+y^2,\ z)=0$, axe Oz en coordonnées cartésiennes.

$f(r,\ z)=0$, équation en coordonnées cylindriques (r, θ, z).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = \varphi(r), \end{cases}$$ équations paramétriques d'une surface d'axe Oz.

$\theta \in [0, 2\pi[$ et $r > 0$.

FORMATION DE L'ÉQUATION :

Surface d'axe Oz, de méridienne $y = 0$, $f(x,z)=0$:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0.$$

Surface d'axe Oz contenant la courbe $x=\varphi(u)$, $y=\psi(u)$, $z=\theta(u)$:

éliminer u entre $$x^2+y^2=\varphi^2+\psi^2,$$ $$z=\theta(u).$$

CÔNE DE RÉVOLUTION DE SOMMET O :

$$x^2+y^2+z^2-k(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0,$$ axe parallèle à $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$.

6.8.5 Quadriques

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé R_3 d'origine $O(0,0,0)$.
DÉFINITION. — On appelle *quadrique*, toute surface dans $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$f(x,y,z) \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

avec A, B, C, D, E, F, des réels non tous nuls et G, H, I, J, des réels.

■ Méthode de réduction de l'équation d'une quadrique

On considère la matrice de la forme quadratique associée :

$$M = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$$

1° Cette matrice est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. On écrit $M = PDP'$, avec $P^{-1} = P'$ (matrice orthogonale de changement de base) et D, matrice diagonale. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres (réelles) de M. Dans la base (orthonormée) de vecteurs propres de M, dont les coordonnées seront notées X, Y, Z, on a :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2.$$

Géométriquement, cela revient à faire une rotation du repère.
2° On se débarrasse des termes de degré 1 à l'aide d'une factorisation canonique. Cela correspond à l'utilisation de l'identité $u^2 + 2\alpha u = (u+\alpha)^2 - \alpha^2$. Géométriquement, cela revient à effectuer une translation du repère.
Si la quadrique est une quadrique à centre, on doit effectuer une translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$, où les coordonnées de Ω sont solutions du système $f'_x(x,y,z) = 0$, $f'_y(x,y,z) = 0$ et $f'_z(x,y,z) = 0$.

Grâce à cette méthode, on trouve l'équation réduite d'une quadrique. L'étude des quadriques à partir de leurs équations réduites est proposée ci-après.

Classification des quadriques, en fonction des valeurs propres de M

Notons que, si deux valeurs propres de M sont égales et non nulles, la quadrique est de révolution.
– Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont de même signe, la quadrique est soit un ellipsoïde, soit un point, soit le vide.
– Si deux valeurs propres sont de même signe et que la troisième est nulle, la quadrique est soit un paraboloïde elliptique, soit un cylindre elliptique, soit une droite ou le vide.
– Si deux valeurs propres sont non nulles, de signes différents et que la troisième est nulle, la quadrique est soit un paraboloïde hyperbolique, soit un cylindre hyperbolique, soit deux plans sécants.
– Si deux valeurs propres sont non nulles, de même signe et que la troisième est du signe contraire, la quadrique est soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cône.
– Si 0 est valeur propre double et que la troisième valeur propre est non nulle, la quadrique est soit un cylindre parabolique, soit deux plans parallèles, soit un plan ou le vide.

Quadriques sur l'équation réduite

Ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

SECTIONS PAR LE PLAN $ux+vy+wz+h=0$:

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-h^2>0, \qquad \text{ellipse réelle ;}$$

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-h^2<0, \qquad \text{ellipse imaginaire.}$$

PLAN TANGENT EN (x_0, y_0, z_0) :

$$\frac{xx_0}{a^2}\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0.$$

NORMALE :

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}.$$

CÔNE CIRCONSCRIT DE SOMMET (x_0, y_0, z_0) :

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0.$$

CYLINDRE CIRCONSCRIT PARALLÈLE A (α, β, γ) :

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}\right)^2-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0.$$

ELLIPSOÏDE RAPPORTÉ A 3 DIAMÈTRES CONJUGUÉS, a', b', c' (axes obliques) :

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-1=0, \qquad \text{avec} \qquad a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2.$$

SPHÈRE DE MONGE (lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits)

$$x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2+c^2)=0.$$

SECTIONS CIRCULAIRES. Plans cycliques centraux :

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}-\varepsilon z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0, \qquad \varepsilon=\pm 1, \qquad a>b>c.$$

Tout plan parallèle à l'un de ces plans est cyclique

OMBILICS :

$$x=\varepsilon' a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \qquad y=0, \qquad z=\varepsilon'' c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

$$\varepsilon' \text{ et } \varepsilon''=\pm 1 \;; \qquad 4 \text{ ombilics.}$$

Hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

SECTION PAR LE PLAN $ux + vy + wz + h = 0$:

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 < 0 \begin{cases} \text{ellipse} \begin{cases} \text{réelle :} \\ a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + h^2 > 0. \\ \text{imaginaires :} \\ a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 + h^2 < 0 ; \end{cases} \\ \text{deux droites sécantes imaginaires :} \\ \quad a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 + h^2 = 0. \end{cases}$$

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0 \begin{cases} \text{parabole : } h \neq 0. \\ \text{deux droites parallèles imaginaires :} \\ \quad h = 0. \end{cases}$$

$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 > 0$ hyperbole.

Pour les autres problèmes se reporter à l'ellipsoïde en changeant a^2 *et* b^2 *en* $-a^2$ *et* $-b^2$.

Hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

SECTION PAR LE PLAN $ux + vy + wz + h = 0$.

$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 < 0$, ellipse réelle ;

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0 \begin{cases} \text{parabole : } h \neq 0, \\ \text{deux droites parallèles réelles : } h = 0 ; \end{cases}$$

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 > 0 \begin{cases} \text{hyperbole : } a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - h^2 \neq 0. \\ \text{deux droites sécantes réelles :} \\ a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - h^2 = 0. \end{cases}$$

Pour les plans tangents, cônes et cylindres circonscrits se reporter à l'ellipsoïde en remplaçant c^2 *par* $-c^2$.

Génération : l'hyperboloïde à une nappe est engendré par une droite variable assujettie à rencontrer 3 droites fixes non parallèles à un même plan.

Génératrices :

$$G \ (1^{\text{er}} \text{ système}) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right); \end{cases}$$

$$\Gamma \ (2^{\text{e}} \text{ système}) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Point commun à G et Γ :

$$x = a\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \qquad y = b\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}, \qquad z = c\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}.$$

Plan (G, Γ) :

$$(1+\lambda\mu)\frac{x}{a} + (\lambda-\mu)\frac{y}{b} - (1-\lambda\mu)\frac{z}{c} - (\lambda+\mu) = 0.$$

Plans cycliques centraux :

$$cy\sqrt{a^2-b^2} \pm bz\sqrt{a^2+c^2} = 0, \qquad a > b.$$

Paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \qquad (p \text{ et } q > 0).$$

SECTION PLANE :

$w = 0$, parabole,

$$w \neq 0 \begin{cases} pu^2 + qv^2 - 2wh > 0, & \text{ellipse réelle,} \\ pu^2 + qv^2 - 2wh < 0, & \text{ellipse imaginaire,} \\ pu^2 + qv^2 - 2wh = 0, & \text{deux droites sécantes imaginaires.} \end{cases}$$

PLAN TANGENT EN (x_0, y_0, z_0) :

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} - (z + z_0) = 0.$$

NORMALE

$$\frac{z - z_0}{-1} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{q}} = \frac{x - x_0}{\frac{x_0}{p}}.$$

CÔNE CIRCONSCRIT DE SOMMET $(x_0,\ y_0,\ z_0)$:

$$\left(\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} - z - z_0\right)^2 - \left(\frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} - 2z_0\right)\left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z\right) = 0.$$

CYLINDRE CIRCONSCRIT PARALLÈLE A $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$:

$$\left(\frac{\alpha x}{p} + \frac{\beta y}{q} - \gamma\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q}\right)\left(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z\right) = 0.$$

PLANS CYCLIQUES

$$z\sqrt{p} \pm x\sqrt{q - p} = 0. \qquad z\sqrt{p} \pm y\sqrt{p - q} = 0.$$

OMBILICS :

$$\begin{cases} z = \dfrac{q - p}{2}, & y = 0, x = \pm\sqrt{p(q - p)}, \quad q > p\,; \\ z = \dfrac{p - q}{2}, & y = \pm\sqrt{q(p - q)}, \quad z = 0, \quad q < p. \end{cases}$$

Paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \qquad (p \text{ et } q \text{ positifs}).$$

SECTION PLANE :

$$w = 0 \begin{cases} pu^2 - qv^2 \neq 0, & \text{parabole,} \\ pu^2 - qv^2 = 0, & \text{une droite.} \end{cases}$$

$$w \neq 0 \begin{cases} pu^2 - qv^2 - 2wh \neq 0, & \text{hyperbole,} \\ pu^2 - qv^2 - 2wh = 0, & \text{deux droites sécantes réelles.} \end{cases}$$

Pour les plans tangents, cônes et cylindres circonscrits, se reporter au paraboloïde elliptique, en remplaçant q par – q.

GÉNÉRATRICES :

$$\underset{(1^{\text{er}} \text{ système})}{G} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \lambda, & \text{parallèle au plan directeur} \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{2z}{\lambda}, & \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0. \end{cases}$$

$$\underset{(2^{\text{e}} \text{ système})}{\Gamma} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \mu, & \text{parallèle au plan directeur} \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = \dfrac{2z}{\mu}, & \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0. \end{cases}$$

Point commun à G et Γ :

$$x = \sqrt{p}\,\frac{\lambda + \mu}{2}, \qquad y = \sqrt{q}\,\frac{\lambda - \mu}{2}, \qquad z = \frac{\lambda\mu}{2}.$$

Plan (G, Γ) :

$$\frac{\lambda + \mu}{\sqrt{p}}\,x - \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{q}}\,y - 2z - \lambda\mu = 0.$$

GÉNÉRATION DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

1er mode : une droite assujettie à s'appuyer sur 3 droites données parallèles à un même plan, deux quelconques de ces droites n'étant pas dans un même plan.
2e mode : une droite assujettie à rencontrer 2 droites fixes non situées dans un même plan, et à rester parallèles à un plan fixe auquel les droites données ne sont pas parallèles.

7 • PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

7.1 Probabilités

7.1.1 Probabilités simples et conditionnelles

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une expérience dont l'issue ne peut être préalablement déterminée, parmi toutes les possibilités.

NOTATIONS

– Ω : univers ou ensemble de toutes les issues possibles de $\mathcal{E}$.
– Événement A : tout sous-ensemble de l'univers Ω (en réalité, ce n'est pas la définition exacte d'un événement car celle-ci nécessite des concepts mathématiques plus ardus non présentés dans cet ouvrage).
– Événement élémentaire $\{\omega\}$: sous-ensemble de l'univers constitué d'un seul élément (autrement dit, un singleton).
– Événement impossible : événement qui ne contient aucun des éléments de Ω.
– Événement certain : ensemble Ω de toutes les possibilités.
– Événements incompatibles A et B : ce sont deux parties A et B de Ω telles que $A \cap B = \varnothing$.

DÉFINITION SIMPLIFIÉE DE LA NOTION DE PROBABILITÉ.

Cet ouvrage n'étant *a priori* pas destiné à des mathématiciens, mais à des ingénieurs, nous préférons ne donner qu'une définition approximative, mais intuitive, de la notion de probabilité. La façon rigoureuse de définir cette notion consiste à introduire la notion de tribu et à évoquer la théorie de la mesure, ce que nous ne ferons pas dans cet ouvrage.
Une probabilité (ou mesure de probabilité) est une application $\mathbb{P}$ à valeurs dans [0, 1] telle que :

1° $\mathbb{P}(\varnothing) = 0,\ \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

2° Pour tous A, B, incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ. — Si tous les événements élémentaires $\omega_1, \cdots, \omega_n$ constituant Ω (de cardinal n) ont la même probabilité p, on a

$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p$ pour tout i entre 1 et n, et de plus :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = np,$$

d'où $p = \dfrac{1}{n}$.

Il découle de ceci que la probabilité d'un événement A s'écrit alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$, où card A désigne le nombre d'événements élémentaires de A et card Ω celui de Ω.

Probabilités de l'union. — Si A et B ne sont pas incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

On retrouve bien sûr la formule définissant une mesure de probabilité si A et B sont incompatibles, car dans ce cas, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

Probabilités conditionnelles.

A/B désigne l'événement « A, lorsque B est réalisé ». On a :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{si } \mathbb{P}(B) > 0.$$

Conséquence : formule de *Bayes*. Soient $A_1, \cdots, A_n$, n événements deux à deux incompatibles dont la réunion forme l'ensemble Ω, tels que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout i. On dit alors que ces ensembles réalisent une partition de Ω. Soit B, un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On a :

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B \mid A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B \mid A_n)}.$$

Indépendance. — Deux événements A et B sont dits indépendants si, et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Dans le cas où $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, cela revient à dire que $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$.

7.1.2 Notion de variable aléatoire réelle (v.a.r.)

Comme précédemment, on adoptera dans ce paragraphe plutôt le point de vue de l'ingénieur et on choisira de ne pas entrer dans des considérations mathématiques abstraites trop poussées. En effet, pour définir rigoureusement la notion de v.a.r., il est nécessaire d'utiliser des rudiments de la théorie de la mesure. Ici, nous donnons une définition plus approximative, mais aussi plus intuitive, n'utilisant pas cette théorie.

On se place dans un espace probabilisé, c'est-à-dire un espace Ω sur lequel on a défini une mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

DÉFINITION. — Une v.a.r. X est une application associant à un événement élémentaire un nombre réel. On note $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

LOI DE PROBABILITÉ $\mathbb{P}_X$ D'UNE V.A.R. X.

$\mathbb{P}_X$ est une application à valeurs réelles définie pour A, sous-ensemble de $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}).$$

FONCTION DE RÉPARTITION F_X D'UNE V.A.R. X.

La loi d'une v.a.r. X peut aussi être caractérisée par $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, sa *fonction de répartition*, définie par :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]).$$

F_X est toujours croissante, continue à droite (i.e. $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t<a}} F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a[)$), telle que $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Lien entre loi de probabilité et fonction de répartition — Deux v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi de probabilité si, et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Lien entre loi de probabilité et fonction caractéristique — Notons que la fonction caractéristique d'une v.a.r., qui sera introduite ultérieurement, permet elle aussi de caractériser la loi d'une v.a.r. En effet, deux v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi de probabilité si, et seulement si elles ont même fonction caractéristique.

■ V.a.r. discrètes

DÉFINITION. — Une v.a.r. est dite *discrète* si elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs.

Rappel : un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une application bijective de N dans E.

FONCTION INDICATRICE ET MESURE DE DIRAC.

On appelle *mesure de Dirac en a* et on note δ_a l'application :

$$\delta_a : \quad \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \{0,1\}$$
$$A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$

On appelle *fonction indicatrice de A* l'application :

$$\mathbf{1}_A: \quad \Omega \longrightarrow \{0,1\}$$
$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

LOI, ESPÉRANCE ET MOMENTS DE V.A.R. DISCRÈTES.

Une v.a.r. X est discrète si elle s'écrit :

$$X = x_1 \mathbf{1}_{A_1} + \ldots + x_n \mathbf{1}_{A_n} + \ldots,$$

où A_i désigne un sous-ensemble de Ω et x_i un nombre réel. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}_X = p_1 \delta_{x_1} + \ldots + p_n \delta_{x_n} + \ldots, \text{ où } p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x_i\}).$$

De plus, $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Espérance de la v.a.r. — $f(X)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $p_1 | f(x_1) | + \ldots + p_n | f(x_n) | + \ldots < +\infty$. On la note $\mathbb{E}(f(X))$ et elle est définie par :

$$\mathbb{E}(f(X)) = p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n) + \ldots$$

Dans le cas particulier où f est la fonction identité, on a :

$$\mathbb{E}(X) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + \ldots$$

Dans le cas particulier où $f(x) = x^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X^p)$ s'appelle *moment d'ordre p de X*.

Variance de X. — Si X admet un moment d'ordre 2, on définit :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - E(X))^2].$$

On peut aussi la calculer grâce à la formule de König : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Écart-type de X. — On le note $\sigma(X)$ et on le définit par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE V.A.R. DISCRÈTE.

Elle est notée φ_X et est définie par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = p_1 e^{itx_1} + \ldots + p_n e^{itx_n} + \ldots$$

LES PRINCIPALES LOIS DISCRÈTES DE PROBABILITÉ.

Nom de la loi	Loi $\mathbb{P}_X$ de la v.a.r. X	Espérance	Variance	Fonction caractéristique
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$	$\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$	p	$p(1-p)$	$\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$	$\mathbb{P}_X = (1-p)^n\delta_0 + \ldots$ $+ C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\delta_k + p^n\delta_n$	np	$np(1-p)$	$\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$	$\mathbb{P}_X = \delta_0 + \ldots + \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\delta_k + \ldots$	λ	λ	$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$	$\mathbb{P}_X = p\delta_1 + \ldots + p(1-p)^{k-1}\delta_k + \ldots.$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\varphi_X(t) = \dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

Les modèles associés.

- *Loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(p)$: expérience aléatoire comportant deux issues (par exemple, le lancer d'une pièce) : le succès (par exemple pile) de probabilité p et l'échec (face dans cet exemple) de probabilité $1 - p$.
- *Loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$: on répète n fois et de façon indépendantes une épreuve de Bernouilli de paramètre p.
- *Loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$: supposons que sur une période T, un événement arrive en moyenne λ fois. Appelons X, la variable aléatoire déterminant le nombre de fois où l'événement se produit dans la période T. X prend des valeurs entières : 0, 1, 2, ··· et suit une loi de Poisson de paramètre λ.

  On se sert également de la loi de Poisson pour fournir une approximation de la loi binomiale. Lorsque n est grand et que p tend vers 0, avec $np = \lambda$, la loi binomiale peut être approximée une loi de Poisson de paramètre λ. En pratique, on remplace la loi binomiale par une loi de Poisson dès que $n > 30$ et $np < 5$.
- *Loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$: la variable aléatoire X donnant le rang du premier succès lorsque l'on répète de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p suit une loi géométrique de paramètre p.

■ V.a.r. absolument continues

DÉFINITION. — On dit qu'une v.a.r. *admet une densité* ou que la loi de X est *absolument continue* s'il existe une fonction f (dite mesurable) à valeurs dans $[0,+\infty]$ telle que, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbf{1}_A(x)\mathrm{d}x.$$

f s'appelle la *densité* de X. On a nécessairement $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$.

FONCTION DE RÉPARTITION.

La loi de X peut être caractérisée par sa fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{]-\infty,t]} f(x)\mathrm{d}x.$$

F_X est croissante et vérifie $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Remarque : si f est continue, alors F_X est dérivable et $F_X' = f$.

LOI, ESPÉRANCE ET MOMENTS DE V.A.R. À DENSITÉ.

On considère *X*, une v.a.r. absolument continue de densité *f*.
Espérance de la v.a.r. — $g(X)$, où g est une fonction $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$. On la note $\mathbb{E}(g(X))$ et elle est définie par :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Dans le cas particulier où g est la fonction identité, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{d}x.$$

Dans le cas particulier où $g(x) = x^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X^p)$ s'appelle *moment d'ordre p de X.*

Variance de X. — Si X admet un moment d'ordre 2, on définit :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

On peut aussi la calculer grâce à la formule de König : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Écart-type de X. — On le note $\sigma(X)$ et on le définit par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE V.A.R. CONTINUE.

Elle est notée φ_X et est définie par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx} f(x)\mathrm{d}x.$$

LES PRINCIPALES LOIS DE PROBABILITÉ ABSOLUMENT CONTINUES.

Nom de la loi	Densité de la v.a.r. X	Espérance	Variance	Fonction de répartition	Fonction caractéristique
Loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$F_X(t) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$	$\varphi_X(t) = \exp\left(mit - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
Loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$	$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$	$\varphi_X(t) = \frac{e^{it} - 1}{it}$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$	$f_X(x) = \frac{e^{-x/\lambda}}{\lambda}$	λ	λ^2	$F_X(t) = (1 - e^{-t/\lambda})\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$	$\varphi_X(t) = \frac{1}{1 - i\lambda t}$
Loi de Cauchy	$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$	n'existe pas	n'existe pas	$F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan t}{\pi}$	$\varphi_X(t) = e^{-\lvert t \rvert}$

Les modèles associés.

- *Loi gaussienne* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: on peut utiliser la loi normale comme approximation d'une loi binomiale de paramètres (n, p) lorsque n est grand et que p et $1 - p$ sont du même ordre de grandeur. On approche alors la loi binomiale par la loi gaussienne ayant même espérance np et même variance $np(1 - p)$. En pratique, on remplace une loi binomiale par une loi normale dès que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1 - p) > 5$.
- *Loi uniforme* $\mathcal{U}([0,1])$: si l'on choisit un point au hasard dans le segment $[a, b]$, et on note X le réel obtenu, alors la v.a.r. X suit une loi uniforme sur $[a, b]$.
- *Loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$: on utilise la loi exponentielle (notamment) dans le domaine de la radioactivité. Chaque atome radioactif possède une durée de vie qui suit une loi exponentielle. Le paramètre λ s'appelle alors la constante de désintégration.
- *Loi de Cauchy* : la loi de Cauchy est la loi d'une variable aléatoire quotient de deux variables aléatoires normales indépendantes centrées et de même écart-type.

7.1.3 Quelques compléments

V.A.R. INDÉPENDANTES.

Soient X et Y, deux v.a.r. La loi jointe de (X, Y) est définie par sa fonction de répartition :

$$\begin{array}{rccc} F_{(X,Y)}: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & (x,y) & \mapsto & \mathbb{P}(X \leq x \text{ et } Y \leq y). \end{array}$$

On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout couple de réels (x, y), $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, où F_X et F_Y désignent respectivement les fonctions de répartition des v.a.r. X et Y. Cela implique que $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

De façon équivalente, X et Y sont indépendantes si, et seulement si pour tous sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(X \in B)$. En particulier, si X et Y sont des v.a.r. à densité, la densité $f_{(X,\ Y)}$ du couple (X, Y) vérifie pour tout couple de réels (x, y), $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, où f_X et f_Y désignent respectivement les densités des v.a.r. X et Y.

INÉGALITÉ DE MARKOV.

Soit X, une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et admettant une espérance. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(|X|).$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X, une v.a.r. d'espérance μ et de variance finie σ^2. Alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Loi faible des grands nombres.

Soient $X_1, \cdots, X_n$, n v.a.r. indépendantes et ayant même loi de probabilité d'espérance commune notée μ. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Loi forte des grands nombres.

Soient $X_1, \cdots, X_n$, n v.a.r. indépendantes définies sur un même espace probabilisé ayant même loi de probabilité, d'espérance μ. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

Théorème central limite.

Soient $X_1, \cdots, X_n$, n v.a.r. définies sur un même espace probabilisé ayant même loi de probabilité, d'espérance μ et de variance σ^2 finies. Posons $Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right)$. Alors, la loi de Z_n converge vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que pour tout $a < b$:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(a < Z_n < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

Somme de deux v.a.r. indépendantes.

Si X et Y sont deux v.a.r. absolument continues indépendantes, la densité de probabilité de la v.a.r. $S = X + Y$ est :

$$f_S = f_X * f_Y : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_X(t) f_Y(x-t) dt.$$

En particulier, on a : $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Loi centrée réduite d'une v.a.r.

Si X est une v.a.r. d'espérance finie μ et de variance finie σ^2, on pose $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Alors, Y est une v.a.r. d'espérance 0 et de variance 1. On dit que la loi de Y est *centrée et réduite*.

Table 1 : Loi binomiale

Effectif $n = 30$

Probabilité $\Pr(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

k	Probabilités individuelles $\Pr(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$									
	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0,739 7	0,545 5	0,401 0	0,293 9	0,214 6	0,156 3	0,113 4	0,082 0	0,059 1	0,042 4
1	0,224 2	0,334 0	0,372 1	0,367 3	0,338 9	0,299 2	0,256 0	0,213 8	0,175 2	0,141 3
2	0,032 8	0,098 8	0,166 9	0,221 9	0,258 6	0,276 9	0,279 4	0,269 6	0,251 3	0,227 7
3	0,003 1	0,018 8	0,048 2	0,086 3	0,127 0	0,165 0	0,196 3	0,218 8	0,231 9	0,236 1
4	0,000 2	0,002 6	0,010 1	0,024 3	0,045 1	0,071 1	0,099 7	0,128 4	0,154 8	0,177 1
5		0,000 3	0,001 6	0,005 3	0,012 4	0,023 6	0,039 0	0,058 1	0,079 6	0,102 3
6			0,000 2	0,000 9	0,002 7	0,006 3	0,012 2	0,021 0	0,032 8	0,047 4
7				0,000 1	0,000 5	0,001 4	0,003 2	0,006 3	0,011 1	0,018 0
8					0,000 1	0,000 3	0,000 7	0,001 6	0,003 2	0,005 8
9							0000 1	0,000 3	0,000 8	0,001 6
10								0,000 1	0,000 2	0,000 4
11										0,000 1

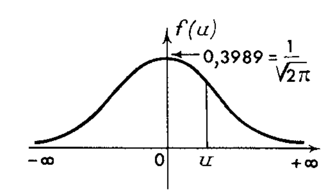
	Probabilités cumulées $\sum_{k=0}^{k=c} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$									
c	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0,739 7	0,545 5	0,401 0	0,293 9	0,214 6	0,156 3	0,113 4	0,082 0	0,059 1	0,042 4
1	0,963 9	0,879 4	0,773 1	0,661 2	0,553 5	0,455 5	0,369 4	0,295 8	0,234 3	0,183 7
2	0,996 7	0,978 3	0,939 9	0,883 1	0,812 2	0,732 4	0,648 8	0,565 4	0,485 5	0,411 4
3	0,999 8	0,997 1	0,988 1	0,969 4	0,939 2	0,897 4	0,845 0	0,794 2	0,717 5	0,647 4
4	0,999 9	0,999 6	0,998 2	0,993 7	0,984 4	0,968 5	0,944 7	0,912 6	0,872 3	0,824 5
5	1	1	0,999 7	0,999 9	0,996 7	0,992 1	0,983 8	0,970 7	0,951 9	0,926 8
6			1	0,999 9	0,999 4	0,998 3	0,996 0	0,991 8	0,984 8	0,974 2
7				1	0,999 9	0,999 7	0,999 2	0,998 0	0,995 9	0,992 2
8					1	0,999 9	0,999 9	0,999 6	0,991 0	0,998 0
9						1	1	0,999 9	0,999 8	0,999 5
10								1	1	0,999 9
11										1

Effectif, $n = 40$

k	Probabilités individuelles $\Pr(k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$									
	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0 0,669 0	0,445 7	0,295 7	0,195 4	0,128 5	0,084 2	0,054 9	0,035 6	0,023 0	0,014 8
1	1 0,270 3	0,363 8	0,365 8	0,325 6	0,270 6	0,214 9	0,165 2	0,123 8	0,091 0	0,065 7
2	2 0,053 2	0,144 8	0,220 6	0,264 6	0,277 7	0,267 5	0,242 5	0,210 0	0,175 4	0,142 3
3	3 0,006 8	0,037 4	0,086 4	0,139 6	0,185 1	0,216 2	0,221 2	0,231 3	0,219 8	0,200 3
4	4 0,000 6	0,007 1	0,024 7	0,053 8	0,090 1	0,127 7	0,170 9	0,186 0	0,201 1	0,205 9
5		0,001 0	0,005 5	0,016 1	0,034 2	0,058 7	0,087 2	0,116 5	0,143 2	0,164 7
6		0,000 1	0,001 0	0,003 9	0,010 5	0,021 8	0,038 3	0,059 1	0,082 6	0,106 8
7			0,000 1	0,000 8	0,002 7	0,006 9	0,014 0	0,025 0	0,039 7	0,057 6
8				0,000 1	0,000 6	0,001 8	0,004 3	0,009 0	0,016 2	0,026 4
9					0,000 1	0,000 4	0,001 2	0,002 8	0,005 7	0,010 4
10						0,000 1	0,000 3	0,000 7	0,001 7	0,003 6
11							0,000 1	0,000 2	0,000 5	0,001 1
12									0,000 1	0,000 3
13										0,000 1

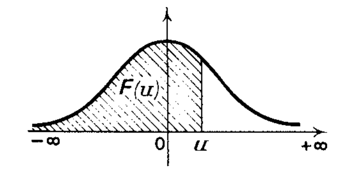
	Probabilités cumulées $\sum_{k=0}^{k=c} C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$									
c	p = 1 %	p = 2 %	p = 3 %	p = 4 %	p = 5 %	p = 6 %	p = 7 %	p = 8 %	p = 9 %	p = 10 %
0	0,669 0	0,445 7	0,295 7	0,195 4	0,128 5	0,084 2	0,054 9	0,035 6	0,023 0	0,014 8
1	0,939 3	0,809 5	0,661 5	0,521 0	0,399 1	0,299 0	0,220 1	0,159 4	0,114 0	0,080 5
2	0,992 5	0,954 3	0,882 2	0,785 5	0,676 7	0,566 5	0,462 5	0,369 4	0,289 4	0,222 8
3	0,999 3	0,991 8	0,968 6	0,925 2	0,861 9	0,782 7	0,383 7	0,600 7	0,509 2	0,423 1
4	1	0,998 8	0,993 3	0,979 0	0,952 0	0,910 4	0,854 6	0,786 8	0,710 3	0,629 0
5		0,999 9	0,998 8	0,995 1	0,986 1	0,969 1	0,941 9	0,903 3	0,853 5	0,793 7
6		1	0,999 8	0,999 0	0,996 6	0,990 9	0,980 1	0,962 4	0,936 1	0,900 5
7			1	0,999 8	0,999 3	0,997 7	0,994 2	0,987 3	0,975 8	0,958 1
8				1	0,999 9	0,998 5	0,998 5	0,996 3	0,992 0	0,984 5
9					1	0,999 9	0,999 7	0,999 0	0,997 6	0,994 9
10						1	0,999 9	0,999 8	0,999 4	0,998 5
11							1	1	0,999 9	0,999 6
12									l	0,999 9
13										1

DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE LA LOI NORMALE RÉDUITE (Loi de Laplace Gauss)
(ordonnées de la courbe normale)



$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

ou $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$



u	$f(u)$	Δ
0,0	0,398 9	–19
0,1	0,397 0	–60
0,2	0,391 0	– 96
0,3	0,381 4	– 131
0,4	0,368 3	– 162
0,5	0,352 1	– 189
0,6	0,333 2	– 209
0,7	0,312 3	– 226
0,8	0,289 7	236
0,9	0,266 1	– 242
1,0	0,241 9	– 240
1,1	0,217 9	– 237
1,2	0,194 2	– 228
1,3	0,171 4	– 217
1,4	0,149 7	– 202
1,5	0,129 5	– 186
1,6	0,110 9	– 169
1,7	0,094 0	– 150
1,8	0,079 0	– 134
1,9	0,065 6	– 116
2,0	0,054 0	– 100
2,1	0,044 0	– 85
2,2	0,035 5	– 72
2,3	0,028 3	– 59
2,4	0,022 4	– 49
2,5	0,017 5	– 39
2,6	0,013 6	– 32
2,7	0,010 4	– 25
2,8	0,007 9	– 19
2,9	0,006 0	– 16
3,0	0,004 4	– 11
3,1	0,003 3	– 9
3,2	0,002 4	– 7
3,3	0,001 7	– 5
3,4	0,001 2	– 3
3,5	0,000 9	– 3
3,6	0,000 6	– 2
3,7	0,000 4	– 1
3,8	0,000 3	– 1
3,9	0,000 2	
4,0	0,000 135	

TABLE 2 : FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE RÉDUITE
(Loi de Laplaee-Gauss)
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à *u*)

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0;986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0;989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(*u*)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. - La table donne les valeurs de *F(u)* pour *u* positif. Lorsque *u* est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple :

pour $u = 1{,}25$ $F(u) = 0{,}894\ 4$

pour $u = 1{,}25$ $F(u) = 0{,}105\ 6$.

Table 3 : Loi de Poisson

$$\text{Prob}(k) = e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

k	Probabilités individuelles Pr (k) = $e^{-m}\frac{m^k}{k!}$								
	m = 0,1	m = 0,2	m = 0,3	m = 0,4	m = 0,5	m = 0,6	m = 0,7	m = 0,8	m = 0,9
0	0,904 8	0,818 7	0,740 8	0,670 3	0,606 5	0,548 8	0,496 6	0,449 3	0,406 6
1	0,090 5	0,163 7	0,222 2	0,268 1	0,303 3	0,329 3	0,347 6	0,359 5	0,365 9
2	0,004 5	0,016 4	0,033 3	0,053 6	0,075 8	0,098 8	0,121 7	0,143 8	0,164 7
3	0,000 2	0,001 1	0,003 3	0,007 2	0,012 6	0,019 8	0,029 4	0,038 3	0,049 4
4		0,000 1	0,000 3	0,000 7	0,001 6	0,003 0	0,005 0	0,007 7	0,011 1
5				0,000 1	0,000 2	0,000 4	0,000 7	0,001 2	0,002 0
6							0,000 1	0,000 2	0,000 3

k	Probabilités individuelles Pr (k) = $e^{-m}\frac{m^k}{k!}$								
	m = 1,0	m = 1,5	m = 2,0	m = 2,5	m = 3,0	m = 3,5	m = 4,0	m = 4,5	m = 5,0
0	0,367 9	0,223 1	0,135 3	0,082 1	0,049 8	0,030 2	0,018 3	0,011 1	0,006 7
1	0,367 9	0,334 7	0,270 7	0,205 2	0,149 4	0,105 7	0,073 3	0,050 0	0,033 7
2	0,183 9	0,251 0	0,270 7	0,256 5	0,224 0	0,185 0	0,146 5	0,112 5	0,084 2
3	0,061 3	0,125 5	0,180 4	0,213 8	0,224 0	0,215 8	0,195 4	0,168 7	0,140 4
4	0,015 3	0,047 1	0,090 2	0,133 6	0,168 0	0,188 8	0,195 4	0,189 8	0,175 5
5	0,003 1	0,014 1	0,036 1	0,066 8	0,100 8	0,132 2	0,156 3	0,170 8	0,175 5
6	0,000 5	0,003 5	0,012 0	0,027 8	0,050 4	0,077 1	0,104 2	0,128 1	0,146 2
7	0,000 1	0,000 8	0,003 4	0,009 9	0,021 6	0,038 5	0,059 5	0,082 4	0,104 4
8		0,000 1	0,000 9	0,003 1	0,008 1	0,016 9	0,029 8	0,046 3	0,065 3
9			0,000 2	0,000 9	0,002 7	0,006 6	0,013 2	0,023 2	0,036 3
10				0,000 2	0,000 8	0,002 3	0,005 3	0,010 4	0,018 1
11					0,000 2	0,000 7	0,001 9	0,004 3	0,008 2
12					0,000 1	0,000 2	0,000 6	0,001 6	0,003 4
13						0,000 1	0,000 2	0,000 6	0,001 3
14							0,000 1	0,000 2	0,000 5
15								0,000 1	0,000 2
16									0,000 1

TABLE 3 : LOI DE POISSON (suite)

k	Probabilités individuelles Pr (k) = $e^{-m}\frac{m^k}{k\,!}$								
	m = 5,5	m = 6,0	m = 6,5	m = 7,0	m = 7,5	m = 8,0	m = 8,5	m = 9,0	m = 9,5
0	0,004 1	0,002 5	0,001 5	0,000 9	0,000 6	0,000 3	0,000 2	0,000 1	0,000 1
1	0,022 5	0,014 9	0,009 8	0,006 4	0,004 1	0,002 7	0,001 7	0,001 1	0,000 7
2	0,061 8	0,044 6	0,031 8	0,022 3	0,015 6	0,010 7	0,007 4	0,005 0	0,003 4
3	0,113 3	0,089 2	0,068 8	0,052 1	0,038 9	0,028 6	0,020 8	0,015 0	0,010 7
4	0,155 8	0,133 9	0,111 8	0,091 2	0,072 9	0,057 3	0,044 3	0,033 7	0,025 4
5	0,171 4	0,160 6	0,145 4	0,127 7	0,109 4	0,091 6	0,075 2	0,060 7	0,048 3
6	0,157 1	0,160 6	0,157 5	0,149 0	0,136 7	0,122 1	0,106 6	0,091 1	0,076 4
7	0,123 4	0,137 7	0,146 2	0,149 0	0,146 5	0,139 6	0,129 4	0,117 1	0,103 7
8	0,084 9	0,103 3	0,118 8	0,130 4	0,137 3	0,139 6	0,137 5	0,131 8	0,123 2
9	0,051 9	0,068 8	0,085 8	0,101 4	0,114 4	0,124 1	0,129 9	0,131 8	0,130 0
10	0,028 5	0,041 3	0,055 8	0,071 0	0,085 8	0,099 3	0,110 4	0,118 6	0,123 5
11	0,014 3	0,022 5	0,033 0	0,045 2	0,058 5	0,072 2	0,085 3	0,097 0	0,106 7
12	0,006 5	0,011 3	0,017 9	0,026 4	0,036 6	0,048 1	0,060 4	0,072 8	0,084 4
13	0,002 8	0,005 2	0,008 9	0,014 2	0,021 1	0,029 6	0,039 5	0,050 4	0,061 7
14	0,001 1	0,002 2	0,004 1	0,007 1	0,011 3	0,016 9	0,024 0	0,032 4	0,041 9
15	0,000 4	0,000 9	0,001 8	0,003 3	0,005 7	0,009 0	0,013 6	0,019 4	0,026 5
16	0,000 1	0,000 3	0,000 7	0,001 4	0,002 6	0,004 5	0,007 2	0,010 9	0,015 7
17		0,000 1	0,000 3	0,000 6	0,001 2	0,002 1	0,003 6	0,005 8	0,008 8
18			0,000 1	0,000 2	0,000 5	0,000 9	0,001 7	0,002 9	0,004 6
19				0,000 1	0,000 2	0,000 4	0,000 8	0,001 4	0,002 3
20					0,000 1	0,000 2	0,000 3	0,000 6	0,001 1
21						0,000 1	0,000 1	0,000 3	0,000 5
22							0,0001	0,000 1	0,000 2
23									0,000 1
24									

TABLE 3 : LOI DE POISSON (suite)

k	*m* = 10	*m* = 11	*m* = 12	*m* = 13	*m* = 14	*m* = 15	*m* = 16	*m* = 17	*m* = 18
0									
1	0,000 5	0,000 2	0,000 1						
2	0,002 3	0,001 0	0,000 4	0,000 2	0,000 1				
3	0,007 6	0,003 7	0,001 8	0,000 8	0,000 4	0,000 2	0,000 1		
4	0,018 9	0,010 2	0,005 3	0,002 7	0,001 3	0,000 7	0,000 3	0,000 2	0,000 1
5	0,037 8	0,022 4	0,012 7	0,007 0	0,003 7	0,001 9	0,001 0	0,000 5	0,000 2
6	0,063 1	0,041 1	0,025 5	0,015 2	0,008 7	0,004 8	0,002 6	0,001 4	0,000 7
7	0,090 1	0,064 6	0,043 7	0,028 1	0,017 4	0,010 4	0,006 0	0,003 4	0,001 9
8	0,112 6	0,088 8	0,065 5	0,045 7	0,030 4	0,019 4	0,012 0	0,007 2	0,004 2
9	0,125 1	0,108 5	0,087 4	0,066 1	0,047 3	0,032 4	0,021 3	0,013 5	0,008 3
10	0,125 1	0,119 4	0,104 8	0,085 9	0,066 3	0,048 6	0,034 1	0,023 0	0,015 0
11	0,113 7	0,119 4	0,114 4	0,101 5	0,084 4	0,066 3	0,049 6	0,035 6	0,024 5
12	0,094 8	0,109 4	0,114 4	0,109 9	0,098 4	0,082 9	0,066 1	0,050 4	0,036 8
13	0,072 9	0,092 6	0,105 6	0,109 9	0,106 0	0,095 6	0,081 4	0,065 8	0,050 9
14	0,052 1	0,072 8	0,090 5	0,102 1	0,106 0	0,102 4	0,093 0	0,070 0	0,065 5
15	0,034 7	0,053 4	0,072 4	0,088 5	0,098 9	0,102 4	0,099 2	0,090 6	0,078 6
16	0,021 7	0,036 7	0,054 3	0,071 9	0,086 6	0,096 0	0,099 2	0,096 3	0,088 4
17	0,012 8	0,023 7	0,038 3	0,055 0	0,071 3	0,084 7	0,093 4	0,096 3	0,093 6
18	0,007 1	0,014 5	0,025 5	0,039 7	0,055 4	0,070 6	0,083 0	0,090 9	0,093 6
19	0,003 7	0,008 4	0,016 1	0,027 2	0,040 9	0,055 8	0,069 9	0,081 4	0,088 7
20	0,001 9	0,004 6	0,009 7	0,017 7	0,028 6	0,041 8	0,055 9	0,069 2	0,079 8
21	0,000 9	0,002 4	0,005 5	0,010 9	0,019 1	0,029 9	0,042 6	0,056 0	0,068 4
22	0,000 4	0,001 2	0,003 0	0,006 5	0,012 1	0,020 4	0,031 0	0,043 3	0,056 0
23	0,000 2	0,000 6	0,001 6	0,003 7	0,007 4	0,013 3	0,021 6	0,032 0	0,043 8
24	0,000 1	0,000 3	0,000 8	0,002 0	0,004 3	0,008 3	0,014 4	0,022 7	0,032 9
25		0,000 1	0,000 4	0,001 0	0,002 4	0,005 0	0,009 2	0,015 4	0,023 7
26			0,000 2	0,000 5	0,001 3	0,002 9	0,005 7	0,010 1	0,016 4
27			0,000 1	0,000 2	0,000 7	0,001 6	0,003 4	0,006 3	0,010 9
28				0,000 1	0,000 3	0,000 9	0,001 9	0,003 9	0,007 0
29					0,000 2	0,000 4	0,001 0	0,002 3	0,004 4
30					0,000 1	0,000 2	0,000 6	0,001 3	0,002 6
31						0,000 1	0,000 3	0,000 7	0,001 5
32						0,000 1	0,000 1	0,000 4	0,000 9
33							0,000 1	0,000 2	0,000 5
34								0,000 1	0,000 2
35									0,000 1
36									0,000 1

7.2 Éléments de statistiques

On rappelle que les fonctions Γ et B sont définies par les relations :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } \mathrm{B}(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t.$$

7.2.1 Quelques lois de probabilités utiles en statistiques

■ La loi du χ^2

Cette loi est caractérisée par un paramètre $k \in \mathbb{N}^*$ appelé *degré de liberté*. Soient X_1 ···, X_k, k v.a.r. indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (loi normale centrée et réduite). Alors, la v.a.r. $X = X_1^2 + \cdots + X_k^2$ suit une loi du χ^2 à k degrés de liberté.

Nom de la loi	$\chi^2(k)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$
Densité de la v.a.r. X	$f_X(t) = \dfrac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$
Espérance	k
Variance	$2k$
Fonction caractéristique	$\varphi_X(t) = (1-2it)^{-k/2}$

■ La loi de Student

Soit Z, une v.a.r. suivant une loi normale centrée et réduite. Soit U, une v.a.r. indépendante de Z suivant une loi du $\chi^2(k)$. Alors, la v.a.r. $T = \dfrac{Z}{\sqrt{U/k}}$ suit *une loi de Student* à k degrés de liberté.

Nom de la loi	Student à k d.d.l, avec $k \in \mathbb{N}^*$
Densité de la v.a.r. X	$f_X(t) = \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}} \dfrac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} \left(1 + \dfrac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$
Espérance	0 si $k > 1$ et non définie si $k = 1$
Variance	$+\infty$ si $k \leq 2$ et $\dfrac{k}{k-2}$ sinon

■ La loi de Fisher-Snédécor

Une v.a.r. X suit la loi de Fisher-Snédécor lorsque $X = \dfrac{U_1/d_1}{U_2/d_2}$, avec U_1 et U_2 deux v.a.r. indépendantes suivant une loi du χ^2 respectivement à d_1 et d_2 degrés de liberté.

Nom de la loi	Fischer-Snédécor $\mathcal{F}(d_1, d_2)$, avec $(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$
Densité de la v.a.r. X	$f_X(t) = \dfrac{\left(\dfrac{d_1 x}{d_1 x + d_2}\right)^{d_1/2}\left(1 - \dfrac{d_1 x}{d_1 x + d_2}\right)^{d_2/2}}{x\mathrm{B}(d_1/2, d_2/2)} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}$
Espérance	$\dfrac{d_2}{d_2 - 2}$ si $d_2 > 2$
Variance	$\dfrac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}$ si $d_2 > 4$

– Soit U, une v.a.r. suivant la loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et Z, une v.a.r. indépendante de U suivant une loi du χ^2 à k degrés de liberté. Alors, la v.a.r. $T = \frac{U}{Z/k}$ suit une loi de Student à k degrés de liberté.
– Si X est une v.a.r. suivant une loi de Student à k degrés de liberté, alors X^2 suit une loi de Fisher-Snédécor de degrés de liberté $d_1 = 1$ et $d_2 = k$.

7.2.2 Caractéristiques des échantillons

On considère une série statistique, mise sous la forme d'un tableau du type :

Observations	x_1	...	x_k
Effectifs	n_1	...	n_k
Fréquences	f_1	...	f_k

, avec $x_i \in \mathbb{R}$.

On pose $N = n_1 + \cdots + n_k$ (effectif total). On rappelle que la fréquence de la valeur x_i est $f_i = \frac{n_i}{N}$.

■ Caractéristiques de tendance centrale

Il est en général nécessaire dans le tableau précédent de classer les observations par ordre croissant.

– *Moyenne d'une série statistique :* $\mu = f_1 x_1 + \cdots + f_k x_k$.
– *Quartiles d'une série statistique :* le premier et le troisième quartiles sont les valeurs telles que, respectivement 25 % et 75 % des observations sont au-dessous d'eux, 75 % et 25 % se situent au-dessus.
– *Déciles d'une série statistique :* le premier et le neuvième décile laissent respectivement 10 % et 90 % des observations au-dessous d'eux, 90 % et 10 % au-dessus d'eux.
– *Médiane d'une série statistique :* la médiane est le deuxième quartile. C'est une valeur qui laisse 50 % des observations au-dessous et 50 % au-dessus. Voici une façon (non unique) de la calculer : si le nombre d'observations N est impair, la médiane est la valeur de l'observation qui se trouve au rang $(N+1)/2$. Si N est pair, la médiane se trouve au milieu de l'intervalle $[x_{N/2}, x_{N/2+1}]$.

■ Caractéristiques de dispersion

– *Étendue d'une série statistique :* écart entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.
– *Variance d'une série statistique :* $\sigma^2 = f_1(x_1 - \mu)^2 + \cdots + f_k(x_k - \mu)^2 = f_1 x_1^2 + \cdots + f_k x_k^2 - \mu^2$.
– *Écart-type d'une série statistique :* c'est σ (la racine carrée de la variance).
– *Écart absolu moyen d'une série statistique :* $e = f_1 | x_1 - \mu | + \cdots + f_k | x_k - \mu |$.
– *Écart interquartile d'une série statistique :* c'est l'écart entre le troisième et le premier quartile de la série.

7.2.3 L'estimation statistique

On considère un paramètre θ dont on souhaite obtenir une estimation θ^*. Le problème se ramène à déterminer une fonction des observations $\theta^* = f(x_1, \cdots, x_k)$, aussi proche que possible du paramètre θ. On associe aux k observations k v.a.r. $X_1, \cdots, X_k$. On dit alors qu'une v.a.r. T_k dépendant de $X_1, \cdots, X_k$ constitue un estimateur de θ si c'est une fonction qui fait correspondre à une suite d'observations issues du modèle une valeur θ^* appelée *estimation.*

Si, pour tout i, $\mathbb{E}(T_i) = \theta$, l'estimateur est dit « sans biais ».

L'estimateur T_k est dit convergent s'il converge en probabilité vers θ, soit :

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(| T_k - \theta | > \varepsilon) = 0, \ \forall \varepsilon > 0.$$

■ Définition

Intervalle de confiance de l'estimation de θ, au seuil de probabilité $\alpha \in]0,1[$ (proche de 1).
C'est un intervalle du type $[\theta^* - \varepsilon_1,\ \theta^* - \varepsilon_2]$, où ε_1 et ε_2 sont choisis tels que :

$$\mathbb{P}(\theta - T_k \in [\varepsilon_1,\ \varepsilon_2]) = 1 - \alpha.$$

■ Estimation d'une moyenne

On considère une population de moyenne μ inconnue et un nombre d'observations k grand. $X_1,\ \cdots,\ X_k$ sont k v.a.r. associées aux observations. On suppose qu'elles possèdent des moments d'ordres 1 et 2, de même loi de probabilité.

– Si la variance σ^2 est connue.

Un estimateur sans biais de la moyenne est donné par $\mu^* = \frac{1}{k}(X_1 + \cdots + X_k)$.

Intervalle de confiance de la moyenne au seuil de probabilité α*, lorsque k est grand :* $\left[\mu^* - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{k}},\ \mu^* + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{k}}\right]$,

où $u_{\alpha/2}$ est lu dans la table de la loi normale centrée réduite (voir les tables de lois, en fin de chapitre) de sorte que $\mathbb{P}(|U| > u_{\alpha/2}) = \alpha$, avec U, une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$.

– Si la variance σ^2 n'est pas connue.

On calcule de prime abord un estimateur sans biais de la moyenne $\mu^* = \frac{1}{k}(X_1 + \cdots + X_k)$.

Un estimateur sans biais de σ^2 est $\sigma^{*2} = \frac{1}{k-1}\left(\left(x_1 - \mu^*\right)^2 + \cdots + \left(x_k - \mu^*\right)^2\right)$.

Intervalle de confiance de la moyenne au seuil de probabilité α*, lorsque k est grand :* $\left[\mu^* - t_{\alpha/2}\frac{\sigma^*}{\sqrt{k}},\ \mu^* + t_{\alpha/2}\frac{\sigma^*}{\sqrt{k}}\right]$,

où $t_{\alpha/2}$ est lu dans la table de la loi de Student à $k-1$ degrés de liberté (voir les tables de lois, en fin de chapitre) de sorte que $\mathbb{P}\left(|S| > t_{\alpha/2}\right) = \alpha$, avec S, une v.a.r. suivant une loi de Student de paramètre $k-1$.

■ Estimation d'une variance

On calcule de prime abord un estimateur sans biais de la moyenne $\mu^* = \frac{1}{k}(X_1 + \cdots + X_k)$.

On désigne par s^2 la variance de cette série statistique, c'est-à-dire $s^2 = \frac{1}{n}((x_1 - \mu^*)^2 + \cdots + (x_k - \mu^*)^2)$.

Un estimateur sans biais de la variance est donné par $\sigma^{*2} = \frac{1}{k-1}\left(\left(X_1 - \mu^*\right)^2 + \cdots + \left(X_k - \mu^*\right)^2\right)$.

Intervalle de confiance de la variance au seuil de probabilité α*, lorsque k est grand :* $\left[\frac{ns^2}{\chi_1^2}, \frac{ns^2}{\chi_2^2}\right]$, où χ_1^2 et χ_2^2 sont lus dans la table de la loi du χ^2 à $k-1$ degrés de liberté, telles que $\mathbb{P}\left(\chi^2 \in \left[\chi_1^2, \chi_2^2\right]\right) = 1 - \alpha$.

7.2.4 La régression linéaire

On considère deux grandeurs statistiques X et Y. Parfois, il apparaît que ces grandeurs semblent liées par une relation affine, du type $Y = aX + b$. La régression linéaire consiste à déterminer une estimation des valeurs a et b et à quantifier la validité de cette relation grâce au coefficient de corrélation linéaire.

À partir de mesures des variables statistiques X et Y, on peut placer sur un graphe les points $M_i(x_i, y_i)$. On appelle ce type de graphe un *nuage de points*. Si les points M_i paraissent alignés, on peut alors tenter une régression linéaire, c'est-à-dire chercher la droite (D) dont l'équation est $y = ax + b$ et qui passe au plus près des points M_i, selon la *méthode des moindres carrés*. Cette méthode consiste à rendre minimale la somme des carrés des écarts des points à la droite, autrement dit, on cherche a et b tels que la quantité :

$$d^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2 + \cdots + (y_k - ax_k - b)^2$$

soit rendue minimale.

■ Notations

– *Moyenne empirique des X :* $\overline{x} = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k)$.

– *Moyenne empirique des Y :* $\overline{y} = \frac{1}{k}(y_1 + \cdots + y_k)$.

– *Variance empirique des x :* $\mathrm{Var}(x) = \frac{1}{n}\left(\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + \left(x_k - \overline{x}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right) - \overline{x}^2$.

– *Écart-type empirique des x :* $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(x)}$.

– *Variance empirique des y :* $\mathrm{Var}(y) = \frac{1}{n}\left(\left(y_1 - \overline{y}\right)^2 + \cdots + \left(y_k - \overline{y}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\left(y_1^2 + \cdots + y_k^2\right) - \overline{y}^2$.

– *Écart-type empirique des y :* $\sigma_y = \sqrt{\mathrm{Var}(y)}$.

– *Covariance empirique des x et y :* $\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n}((x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + \cdots + (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})) = \frac{1}{n}(x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k) - \overline{x}\,\overline{y}$.

■ Caractérisation de la droite de régression d'équation *y = ax + b*

– *Coefficient directeur :* $a = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\mathrm{Var}(x)}$.

– *Ordonnée à l'origine :* $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Notons que cette droite passe par le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$.

Coefficient de corrélation linéaire. La valeur absolue de ce coefficient est inférieure à 1. En général, on considère que l'ajustement affine est valide lorsque la valeur absolue de ce coefficient est supérieure à $\sqrt{3/2}$. Il est défini par :

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

■ Intervalle de confiance d'une observation

Une droite de régression peut être utilisée pour prédire l'ordonnée y_{k+1} d'un $(k+1)^{\mathrm{e}}$ point du nuage.

Estimateur sans biais de l'observation : $y^*_{k+1} = aX_{k+1} + b$.

Estimateur sans biais de la variance : $\sigma^* = \frac{1-\rho^2}{k-1}\left(\left(Y_1 - \overline{y}\right)^2 + \cdots + \left(Y_k - \overline{y}\right)^2\right)$.

Intervalle de confiance de l'observation au seuil de probabilité α*, lorsque k est grand :*

$$\left[y^*_{k+1} - t_{\alpha/2}\sigma^*\beta, y^*_{k+1} + t_{\alpha/2}\sigma^*\ \beta \right]$$

où

– on a posé $\beta = \sqrt{1 + \frac{1}{k} + \frac{\left(x_{k+1} - \overline{x}\right)^2}{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \cdots + \left(x_k - \overline{x}\right)^2}}$,

– $t_{\alpha/2}$ est lu dans la table de la loi de Student à $k-2$ degrés de liberté (voir les tables de lois, en fin de chapitre) de sorte que $\mathbb{P}\left(|S| > t_{\alpha/2}\right) = \alpha$, avec S, une v.a.r. suivant une loi de Student de paramètre $k-2$.

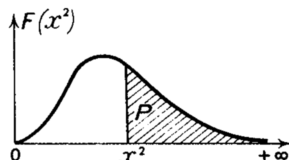


TABLE 4
Loi du χ^2

m \ P	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
1	0,000 2	0,001 0	0,003 9	0,015 8	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Table 5 : Loi de Student

m \ P	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,131	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,314	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

TABLE 6 : LOI DE SNEDECOR

m_2	$m_1 = 1$		$m_1 = 2$		$m_1 = 3$		$m_1 = 4$		$m_1 = 5$	
	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$
1	161,4	4 052	199,5	4 999	215,7	5 403	224,6	5 625	230,2	5 764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

TABLE 6 : LOI DE SNEDECOR (suite)

m_2	$m_1 = 6$		$m_1 = 8$		$m_1 = 12$		$m_1 = 24$		$m_1 = \infty$	
	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$
1	234,0	5 859	238,9	5 981	243,9	6 106	249,0	6 234	254,3	6 366
2	19,33	99,33	19,37	99,36	19,41	99,42	19,45	19,56	19,50	99,50
3	8,94	27,91	8,84	27,49	8,74	27,05	8,64	26,60	8,53	26,12
4	6,16	15,21	6,04	14,80	5,91	14,37	5,77	13,93	5,63	13,46
5	4,95	10,67	4,82	10,27	4,68	9,89	4,53	9,47	4,36	9,02
6	4,28	8,47	4,15	8,10	4,00	7,72	3,84	7,31	3,67	6,88
7	3,87	7,19	3,73	6,84	3,57	6,47	3,41	6,07	3,23	5,65
8	3,58	6,37	3,44	6,03	3,28	5,67	3,12	5,28	2,93	4,86
9	3,37	5,80	3,23	5,47	3,07	5,11	2,90	4,73	2,71	4,31
10	3,22	5,39	3,07	5,06	2,91	4,71	2,74	4,33	2,54	3,91
11	3,09	5,07	2,95	4,74	2,79	4,40	2,61	4,02	2,40	3,60
12	3,00	4,82	2,85	4,50	2,69	4,16	2,50	3,78	2,30	3,36
13	2,92	4,62	2,77	4,30	2,60	3,96	2,42	3,59	2,21	3,16
14	2,85	4,46	2,70	4,14	2,53	3,80	2,35	3,43	2,13	3,00
15	2,79	4,32	2,64	4,00	2,48	3,67	2,29	3,29	2,07	2,87
16	2,74	4,20	2,59	3,89	2,42	3,55	2,24	3,18	2,01	2,75
17	2,70	4,10	2,55	3,79	2,38	3,45	2,19	3,08	1,96	2,65
18	2,66	4,01	2,51	3,71	2,34	3,37	2,15	3,00	1,92	2,57
19	2,63	3,94	2,48	3,63	2,31	3,30	2,11	2,92	1,88	2,49
20	2,60	3,87	2,45	3,56	2,28	3,22	2,08	2,86	1,84	2,42
21	2,57	3,81	2,42	3,51	2,25	3,17	2,05	2,80	1,81	2,36
22	2,55	3,76	2,40	3,45	2,23	3,12	2,03	2,75	1,78	2,31
23	2,53	3,71	2,38	3,41	2,20	3,07	2,00	2,70	1,76	2,26
24	2,51	3,67	2,36	3,36	2,18	3,03	1,98	2,66	1,73	2,21
25	2,49	3,63	2,34	3,32	2,16	2,99	1,96	2,62	1,71	2,17
26	2,47	3,59	2,32	3,29	2,15	2,96	1,95	2,58	1,69	2,13
27	2,46	3,56	2,30	3,26	2,13	2,93	1,93	2,55	1,67	2,10
28	2,44	3,53	2,29	3,23	2,12	2,90	1,91	2,52	1,65	2,06
29	2,43	3,50	2,28	3,20	2,10	2,87	1,90	2,49	1,64	2,03
30	2,42	3,47	2,27	3,17	2,09	2,86	1,89	2,47	1,62	2,01
40	2,34	3,29	2,18	2,99	2,00	2,66	1,79	2,29	1,51	1,80
60	2,25	3,12	2,10	2,82	1,92	2,50	1,70	2,12	1,39	1,60
120	2,17	2,96	2,01	2,66	1,83	2,34	1,61	1,95	1,25	1,38
∞	2,09	2,80	1,94	2,51	1,75	2,18	1,52	1,79	1,00	1,00

INDEX ALPHABÉTIQUE

D

E